15.7 Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Budeme se ještě krátce zabývat systémy diferenciálních rovnic. V této části budeme užívat ještě hlubší poznatky z algebry. Následující výklad ukazuje jejich využití. Ilustrativní příklad nám ukáže, že se budeme moci omezit, podobně jako již dříve, na systémy (soustavy) rovnic prvního řádu.

Příklad 15.7.1. Mechanickou konfiguraci, v níž je na pružině o tuhosti k_1 zavěšeno závaží o hmotnosti m_1, na kterém je na pružině o tuhosti k_2 zavěšeno závaží o hmotnosti m_2, popisuje systém

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ m_2 y_2'' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že kromě gravitační síly nepůsobí na systém žádná další vnější síla. Funkce y_1 a y_2 popisují výchylky závaží od rovnovážného stavu. Pomocí substituce $y_1' = (1/m_1)y_3$, $y_2' = (1/m_2)y_4$ dostaneme systém prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= (1/m_1)y_3\,, \\ y_2' &= (1/m_2)y_4\,, \\ y_3' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ y_4' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předešlý příklad lze snadno zobecnit: každý podobný systém lze analogicky převést na systém prvního řádu. Dále ukážeme, jak *ve speciálních případech* řešit systém (soustavu) diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \end{aligned}$$

který jsme zkráceně zapisovali ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,,$$

a pro který jsme odvodili „lokální“ existenční Větu 15.4.1. Chceme-li systém prakticky řešit, jsou zjednodušení nutná: omezíme se proto na *lineární systémy.* Obecně jde totiž o složitý problém, avšak, stejně jako výše, pro speciální případy je k dispozici poměrně jednoduchá teorie. Budeme se tedy zabývat systémem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)\,, \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)\,, \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)\,, \end{aligned} \tag{15.38}$$

který budeme zapisovat „maticově“ ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,;$$

zde $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{b}$ chápeme jako *sloupcové n-rozměrné vektory*, $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice typu $n\times n$, jejímiž prvky jsou (reálné) funkce. Přitom budeme předpokládat, že a_{jk} a b_j jsou *spojité* funkce na otevřeném intervalu $I\subset\mathbb{R}$. V tomto případě pro každý bod $[\,x_0,\boldsymbol{y}^0\,]\in I\times\mathbb{R}^n$ existuje podle Věty 15.4.4 právě jedno řešení $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ definované na intervalu I, splňující podmínku $\boldsymbol{\varphi}(x_0)=\boldsymbol{y}^0$.

Není příliš překvapující, že budeme uvažovat opět *dva* systémy rovnic, a to jednak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{15.39}$$

a pak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}\,. \tag{15.40}$$

Postupně odvodíme tvrzení, která budou obdobná jako v případě lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Lemma 15.7.2. *Všechna řešení systému* (15.40) *definovaná na tomtéž intervalu tvoří lineární prostor. Speciálně to platí pro všechna maximální řešení.*

Důkaz. Pro řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ systému (15.40) a c_1, $c_2\in\mathbb{R}$ zřejmě platí

$$(\,c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2)' = c_1\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}(x)\,(\,c_1\boldsymbol{y}_1+c_2\boldsymbol{y}_2)\,,$$

což dokazuje tvrzení. □

Nyní ukážeme, že tento prostor má dimenzi n. Nejprve budeme řešit důležitou otázku, kdy jsou n-rozměrné vektorové funkce $\boldsymbol{g}_k(x)=(g_k^1(x),g_k^2(x),\dots,g_k^n(x))$, $x\in I$, $k=1,\dots,n$, lineárně nezávislé na intervalu $I\subset\mathbb{R}$. Jsou-li lineárně závislé, pak musí existovat netriviální lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ tak, že (vektorová) funkce

$$c_1\boldsymbol{g}_1(x)+\cdots+c_n\boldsymbol{g}_n(x)\equiv\mathbf{0}\,,$$

tj. tato kombinace je n-rozměrným nulovým vektorem v každém bodě $x\in I$. K tomu je nutné, aby determinant matice, jejíž sloupce tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{g}_1(x),\dots,\boldsymbol{g}_n(x)$, $x\in I$, byl na I *nulovou funkcí*. Determinant funkční matice, jejíž sloupce tvoří funkce $\boldsymbol{g}_1(x),\dots,\boldsymbol{g}_n(x)$, $x\in I$, má analogické vlastnosti jako dříve zavedený Wrónskiho determinant. To nám bude vodítkem pro další postup.

Pomocí Věty 15.4.4 o jednoznačnosti najdeme n lineárně nezávislých řešení

$$\boldsymbol{y}_1=(y_1^1,y_1^2,\dots,y_1^n),\ \dots,\ \boldsymbol{y}_n=(y_n^1,y_n^2,\dots,y_n^n)\,,$$

která splňují rovnici (15.40) a pro nějaké $x_0\in I$ podmínku

$$\boldsymbol{y}_k(x_0)=\mathbf{e}^k\,,\quad k=1,\dots,n\,; \tag{15.41}$$

vektor $\mathbf{e}^k$ je standardní souřadnicový vektor $(0,0,\dots,1,\dots,0)$, který má k-tou souřadnici rovnou 1, zatímco ostatní jsou rovny 0. Řešení jsou opravdu lineárně nezávislá, protože z $\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k=\mathbf{0}$ plyne dosazením x_0 rovnost

$$\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k(x_0)=\sum_{k=1}^n c_k\mathbf{e}^k=\mathbf{0}\,.$$

Protože $\mathbf{e}^k$, $k = 1, \ldots, n$, jsou lineárně nezávislé, plyne odtud $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Lemma 15.7.3. *Všechna maximální řešení systému* (15.40) *tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. Z předchozí úvahy vyplývá, že dimenze tohoto prostoru je alespoň n. Je-li $\boldsymbol{y}^*$ libovolné řešení systému (15.40), je $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$ a $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \sum_{k=1}^n h^k \mathbf{e}^k$. Pak podle věty o jednoznačnosti je $\boldsymbol{y}^*(x) = \sum_{k=1}^n h^k \boldsymbol{y}_k(x)$ pro všechna $x \in I$. $\square$

Jsou-li funkce $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$, resp. jejich složky g_j^k, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, funkcemi z $\mathcal{C}^k(I)$, je i jejich determinant funkcí z $\mathcal{C}^k(I)$. Přitom je pro lineárně závislé funkce roven 0 všude v I. Ukážeme, že v případě vektorových funkcí $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$, které jsou *řešeními systému* (15.40), platí alternativa v „silnější“ podobě: je-li determinant matice $\left(y_j^k\right)$ různý od 0 alespoň v jednom bodě intervalu I, je nenulový ve *všech* bodech I. Je-li totiž nulový v nějakém bodě $x_0 \in I$, existuje netriviální lineární kombinace taková, že $c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}$. Pak podle věty o jednoznačnosti je

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}$$

pro všechna $x \in I$. Jestliže srovnáme dosud nalezené poznatky s tím, co jsme odvodili pro lineární rovnici n-tého řádu, vidíme, že je účelné i v tomto případě zavést pojem *fundamentálního systému řešení.*

Definice 15.7.4. Množinu každých n lineárně nezávislých řešení systému (15.40) na intervalu (c, d) nazýváme *fundamentální systém řešení soustavy* (15.40) na (c, d). Matici, jejíž *sloupce* tvoří fundamentální systém maximálních řešení soustavy (15.40), nazýváme *fundamentální maticí soustavy* (15.40). Budeme ji značit $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Y}(x)$. Je tedy

$$\boldsymbol{Y}(x) := \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \ldots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \ldots & y_n^n \end{pmatrix} \tag{15.42}$$

Důsledek 15.7.5. *Determinant fundamentální matice systému* (15.42) *je na I všude různý od* 0.

Označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *sloupcový* vektor, můžeme zkráceně zapisovat *obecné řešení* jako maticový součin $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}$. Snadno nahlédneme, že i v tomto případě platí analogická tvrzení jako pro lineární rovnici n-tého řádu; jejich důkaz by byl jen opakováním úvah, které jsme již jednou prováděli a které mají elementární charakter. Shrneme tyto poznatky do jediného tvrzení:

Tvrzení 15.7.6. *Obecné řešení systému* (15.40) *obdržíme jako množinu všech lineárních kombinací fundamentálního systému řešení soustavy* (15.40)*; závisí tak na n parametrech, kterými jsou koeficienty této lineární kombinace. Rozdíl každých dvou řešení systému* (15.39) *je řešením* (15.40)*. Proto obecné řešení systému* (15.39) *obdržíme jako* (*množinový*) *součet obecného řešení systému* (15.40) *a* (*jednoho*) *partikulárního řešení systému* (15.39).

Jestliže známe fundamentální systém řešení systému (15.40), můžeme pro určení partikulárního řešení systému (15.39) užít metodu variace konstant. Při jejím odvození použijeme s výhodou maticový zápis.

Budeme hledat řešení systému (15.39) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\,,$$

kde sloupcový vektor $\boldsymbol{c}(x)$ je (vektorovou) *funkcí* na intervalu I a $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice systému (15.40), která je tedy regulární v každém bodě $x \in I$ a jejíž prvky jsou spojité funkce na I. Pro toto řešení dostaneme

$$\boldsymbol{Y}'(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \big(\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\big)' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Protože $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)$, porovnáním výrazů stojících vlevo a vpravo vyplývá, že $\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$, $x \in I$, a tedy

$$\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\,\boldsymbol{b}(x)\,.$$

Inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}$ je regulární v každém bodě $x \in I$ a její prvky jsou spojité funkce na I; to plyne z vlastností $\boldsymbol{Y}$ a ze vzorce pro výpočet prvků inverzní matice. Proto na pravé straně předcházející rovnosti stojí spojitá vektorová funkce. Integrací poslední rovnosti (v mezích x_0 a x) dostaneme pro každé $x \in I$ vzorec

$$\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{c}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Věta 15.7.7. *Jestliže jsou maticová funkce $\boldsymbol{A}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a je-li $x_0 \in I$, má Cauchyho počáteční úloha pro systém*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0\,,$$

právě jedno řešení na I pro každý bod $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Toto řešení je popsáno vzorcem

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{Y}(x)\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,. \tag{15.43}$$

Důkaz. Pro důkaz správnosti vzorce si stačí uvědomit, že výraz vpravo je v bodě x_0 roven vektoru $\boldsymbol{y}^0$. □

15.8 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Zařazení této části má poměrně zřejmý charakter. V předchozí části jsme poznali, že jsme schopni nalézt metodou variace konstant obecné řešení soustavy lineárních rovnic, pokud známe její *fundamentální systém řešení.* Ten však obecně nalézt neumíme. Ukážeme si však, jak je to možné v případě, že jde o soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

V této části musíme využít poměrně hlubokých poznatků z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si tuto partii přečetl např. v [2], kde je vyložena právě jako aplikace příslušných poznatků z lineární algebry.

Nejprve se seznámíme s tzv. *eliminační metodou*. Budeme řešit systém rovnic

$$\begin{aligned} (y^1)'(x) &= a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}\,y^n + b^1(x)\,, \\ (y^2)'(x) &= a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{2n}\,y^n + b^2(x)\,, \\ &\vdots \\ (y^n)'(x) &= a_{n1}y^1 + a_{n2}y^2 + \cdots + a_{nn}y^n + b^n(x)\,, \end{aligned} \tag{15.44}$$

ve kterém jsou koeficienty a_{jk} konstantní a b^i jsou spojité (reálné) funkce na intervalu (c, d). V maticovém tvaru zapisujeme systémy, se kterými budeme pracovat, takto:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}\,, \tag{15.45}$$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,. \tag{15.46}$$

Poslední systém se často nazývá *autonomní systém lineárních diferenciálních rovnic* a užívá se k popisu fyzikálních nebo technických problémů, jejichž prvky nejsou závislé na čase.

Popišme nejprve některé možné přístupy k řešení systému (15.44). Jsou-li funkce $b^i \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$, zvolme jednu z rovnic, např. první a zderivujme výrazy na obou jejích stranách. Obdržíme rovnici

$$(y^1)''(x) = a_{11}(y^1)' + a_{12}(y^2)' + \cdots + a_{1n}(y^n)' + (b^1)'(x)\,,$$

do které dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \ldots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)''(x) = d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}y^n + \delta^2(x)\,.$$

V dalším kroku zderivováním dostaneme

$$(y^1)'''(x) = d_{21}(y^1)' + d_{22}(y^2)' + \cdots + d_{2n}(y^n)' + (\delta^2)'(x)\,,$$

do které opět dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \ldots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Obdrženou rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)'''(x) = d_{31}y^1 + d_{32}y^2 + \cdots + d_{3n}y^n + \delta^3(x)\,.$$

Po konečně mnoha krocích dostaneme rovnici

$$(y^1)^{(n)}(x) = d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,.$$

Získali jsme tak soustavu rovnic pro $(y^1)', (y^1)'', \ldots, (y^1)^{(n)}$, která je tvaru (v první rovnici $(y^1)'(x) = a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n + b^1(x)$ jen formálně změníme označení koeficientů)

$$\begin{aligned} (y^1)'(x) &= d_{11}y^1 + d_{12}y^2 + \cdots + d_{1n}\,y^n + \delta^1(x)\,, \\ (y^1)''(x) &= d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}\,y^n + \delta^2(x)\,, \\ &\vdots \\ (y^1)^{(n)}(x) &= d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,. \end{aligned} \tag{15.47}$$

Z těchto rovnic postupně vyloučíme $y^2, \dots, y^n$, a to tak, že např. z první rovnice vypočteme y^2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Dostaneme tak $(n-1)$ rovnic, které již neobsahují y^2. Tak postupně snižujeme počet rovnic i neznámých, až dospějeme k jediné rovnici n-tého řádu pro y^1. Vypočteme její obecné řešení (bude obsahovat n konstant $c^1, \dots, c^n$). Pak dosadíme do systému (15.47) za $(y^1)', (y^1)'', \dots, (y^1)^{(n)}$ a dopočteme $y^1, y^2, \dots, y^n$ z *algebraického systému* n rovnic o n neznámých.

Z popisu metody vidíme, že je sice pracná, ale elementární. Takto hladce však nevede vždy k cíli. Může se stát, že nedojdeme až k systému (15.47), ale po menším počtu kroků se na pravé straně všechny neznámé $y^2, \dots, y^n$ zruší. Dostaneme tak pro y^1 lineární rovnici s konstantními koeficienty nižšího řádu nežli n. Její obecné řešení bude záviset na méně nežli n konstantách. Pak lze dosadit y^1 do (15.44) a ze vzniklého systému vytvořit novou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty pro y^2 analogickým postupem, který jsme užili pro y^1. Tato situace může nastat několikrát za sebou. Tak se řešení systému n rovnic může převést na řešení několika lineárních rovnic s konstantními koeficienty řádů nižších než n (součet jejich řádů je n); viz např. [7].

V dalších odstavcích si připomeneme několik pojmů z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si příslušnou látku eventuálně prostudoval v [2]. Tento text obsahuje totiž i kapitolu, v níž čtenář nalezne aplikaci teorie na řešení systémů diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty tvaru (15.40).

Definice 15.8.1. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná čísla, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazýváme polynom (symbolem $\boldsymbol{E}$ značíme jednotkovou matici typu $n \times n$)

$$P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

charakteristickým polynomem matice $\boldsymbol{A}$ [2]). Jeho kořeny se nazývají *vlastní čísla* nebo *vlastní hodnoty* matice $\boldsymbol{A}$, rovnice $P(\lambda) = 0$ je *charakteristická rovnice příslušná k* $\boldsymbol{A}$. Množinu všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme *spektrum* matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\sigma(\boldsymbol{A})$.

Příklad 15.8.2. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15.48}$$

má charakteristický polynom

$$P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + \\ + (1-\lambda) - 3(1+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

[2]) Pokud se zavádí charakteristický polynom pomocí matice $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$, dostaneme stejné výsledky; odpovídající teorie se liší jen nepodstatně.

a její spektrum je tedy $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 3, -2\}$.

Definice 15.8.3. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, nazýváme každý *nenulový* vektor $\boldsymbol{v}$ vyhovující rovnici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ *vlastním vektorem matice* $\boldsymbol{A}$ *příslušným k vlastnímu číslu* λ.

Poznámka 15.8.4. Vlastní vektory hrají důležitou roli v mnoha aplikacích. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}c\boldsymbol{v} = \lambda\, c\boldsymbol{v}$, takže $\boldsymbol{A}$ transformuje podprostor generovaný $\boldsymbol{v}$ na tentýž podprostor, který je proto invariantní. V předcházející definici vlastního vektoru jsme se omezili na nenulové vektory. Pro nulový vektor $\boldsymbol{v}$ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ pro *každé* $\lambda \in \mathbb{C}$, což je nezajímavý případ. Na druhé straně připouštíme, že jak vlastní čísla, tak i vlastní vektory mohou být komplexní. Budeme pracovat i s komplexními funkcemi v roli řešení, i když je naším cílem vyjádřit obecné řešení pomocí reálných funkcí.

Příklad 15.8.5. Nyní navážeme na Příklad 15.8.2. Potom je vlastní vektor [3]) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$, matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$, netriviálním řešením soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, neboli soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Jejím řešením obdržíme $\boldsymbol{v}_1 = (v^1, v^2, v^3) = c(-1, 4, 1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, což je popis *všech* vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

Podobně dospějeme k vyjádření všech vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$, které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = d(1, 2, 1)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, a všech vlastních vektorů, které odpovídají poslednímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ a které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = e(-1, 1, 1)$, $e \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$.

Je vhodné si nyní ukázat, k čemu nám vlastní čísla a vlastní vektory budou. Poznamenejme, že u lineární rovnice n-tého řádu jsme hledali řešení ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ a tímto obratem jsme převedli problém na řešení algebraické rovnice stupně n. Nyní budeme hledat řešení ve tvaru (je to vektorová funkce!) $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor s konstantními složkami. Dosazením do vyšetřovaného systému dostaneme

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}\,,$$

což nás přivádí ke hledání čísel λ a (netriviálních) vektorů $\boldsymbol{v}$, pro které platí $\lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, a tedy i $\big(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. V případě, že se nám podaří takto najít n lineárně nezávislých řešení, je tím problém nalezení obecného řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ vyřešen.

Lemma 15.8.6. *Nechť* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \leq k \leq n$, *jsou* nezávislé *vlastní vektory, příslušné (ne nutně různým) vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$. *Potom*

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\,, \ldots,\ \boldsymbol{y}_k(x) = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k$$

jsou lineárně nezávislá řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

---

[3]) Při výpočtu by se nám dvojí indexy mohly plést, užíváme proto zjednodušené označení a pamatujeme si, že počítáme vektor $\boldsymbol{v}_1$ příslušný k vlastnímu číslu λ_1. Tak postupujeme i při výpočtu dalších vlastních vektorů.

Důkaz. Ověřme ještě jednou, že takto dostáváme řešení systému: je

$$\boldsymbol{y}_k'(x) = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x} \boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x} \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A} \mathrm{e}^{\lambda_k x} \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}_k \,.$$

Položme $\sum_{j=1}^k c_j\, \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$. Dosazením $x = 0$ do lineární kombinace řešení $\boldsymbol{y}_j$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\, \boldsymbol{y}_j(x)\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \mathrm{e}^{\lambda_j x} \boldsymbol{v}_j\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \,.$$

S ohledem na nezávislost $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ dostáváme $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ a tedy i nezávislost řešení $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$. □

Příklad 15.8.7. Pro rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \tag{15.49}$$

má rovnice $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ kořeny $\lambda_{1,2} = -1$ a $\lambda_3 = 2$. Dvojnásobnému kořeni odpovídá soustava rovnic ekvivalentní s jedinou rovnicí pro složky vlastního vektoru

$$v^1 + v^2 + v^3 = 0 \,,$$

takže lze volit *dva* lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu 1, např. $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0)$ a $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -1)$. Snadno zjistíme, že k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2$ lze zvolit vlastní vektor $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$ a nalézt tak obecné řešení rovnice (15.49) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \,.$$

Naproti tomu již u jednoduché rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,,$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$, existuje pouze *jediný* lineárně nezávislý vektor odpovídající tomuto kořeni a který má tvar $\boldsymbol{v} = (c, -c)$, $c \neq 0$. To signalizuje možné obtíže při výskytu vícenásobných vlastních čísel.

Povšimneme si, že problém nenastává v případě, kdy vlastní čísla λ_k, $k = 1, \ldots, n$, jsou navzájem různá. Platí totiž následující

Tvrzení 15.8.8. *Vlastní vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \le k \le n$, příslušné k různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ matice $\boldsymbol{A}$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí. Pro $k = 1$ je platnost tvrzení zřejmá z definice vlastního vektoru. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro $(k - 1)$ a odvoďme jeho platnost pro k. Jestliže pro $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ je

$$c_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \,, \tag{15.50}$$

pak také platí

$$\boldsymbol{A}(\,c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\,\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}\,;$$

Protože jsou $\boldsymbol{v}_j$ vlastní vektory příslušné k vlastním číslům λ_j, $j = 1, \ldots, k$, plyne odtud

$$c_1\,\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\lambda_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\,\lambda_k\,\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,. \tag{15.51}$$

Vynásobíme rovnici (15.50) číslem λ_k a vzniklou rovnost odečteme od (15.51). Dostaneme tak vztah

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}\,.$$

Podle indukčního předpokladu jsou vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ lineárně nezávislé; protože jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ navzájem vesměs různá, plyne z předcházející rovnosti $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Odtud dostáváme i $c_k = 0$ a tvrzení je dokázáno. □

Příklad 15.8.9. Navážeme na předcházející Příklad 15.8.5, ve kterém jsme nalezli tvar vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům. Zvolme $c = d = e = 1$; pak vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 4, 1)$ přísluší k $\lambda_1 = 1$, vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ a $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$.

Máme-li tedy řešit soustavu, zapsanou v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{15.52}$$

ve kterém matici na pravé straně rovnice jsme vyšetřovali v Příkladech 15.8.5 a 15.8.2, lze její obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R}\,. \tag{15.53}$$

K řešení počáteční úlohy není třeba další výklad, uvedeme proto jen jednoduchý ilustrativní příklad:

Příklad 15.8.10. Řešte rovnici s danou počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,. \tag{15.54}$$

Snadno zjistíme, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1)$. Dospějeme tak k rovnici

$$c_1\,\mathrm{e}^{-1\cdot 0} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{3\cdot 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,,$$

jejímž řešením vzhledem k neznámým c_1, c_2 obdržíme hledané řešení počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Situace je však poněkud složitější, jestliže má charakteristický polynom P obecně komplexní kořeny. Hledáme totiž řešení vyjádřené pomocí reálných funkcí. Jsou-li prvky matice $\boldsymbol{A}$ reálná čísla, má i P reálné koeficienty. Postupujeme pak analogicky jako v Poznámce 15.6.1. Kořeny P, které nejsou reálné, se vyskytují v párech a jsou komplexně sdružené. Nechť tedy jsou $\lambda = \beta + \mathrm{i}\gamma$ a $\overline{\lambda} = \beta - \mathrm{i}\gamma$ vlastní čísla matice s reálnými koeficienty $\boldsymbol{A}$. Protože pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, dostáváme rovnosti [4]

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,,$$

takže $\overline{\boldsymbol{v}}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Tyto vektory jsou podle Tvrzení 15.8.8 lineárně nezávislé. Označíme-li $\operatorname{Re}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ nezávislá řešení

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\\ \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\end{aligned}$$

a tedy i nezávislá *reálná řešení* $(1/2)(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$, $(1/2\mathrm{i})(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$, tj.

$$\mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\cos\gamma x - \boldsymbol{v}_2\sin\gamma x)\,,\qquad \mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\sin\gamma x + \boldsymbol{v}_2\cos\gamma x)\,.$$

Tak můžeme nalézt ke každému páru komplexně sdružených (různých) vlastních čísel dvojici lineárně nezávislých reálných řešení; při výpočtu pak již stačí k jednomu z komplexně sdružených různých vlastních čísel najít vlastní vektor a ze získaného komplexního řešení vzít jeho reálnou a imaginární část.

Příklad 15.8.11. Určete obecné řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,, \tag{15.55}$$

Snadno určíme charakteristickou rovnici $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$ a jejím řešením kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. Pro λ_1 snadno spočteme, že lze za příslušný vlastní vektor volit např. $\boldsymbol{v}_1 = (2, -2, 3)$. Pro $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 0 & 0\\ 3 & -2\mathrm{i} & -2\\ 2 & 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix} = 0\,,$$

takže za vektor, příslušný k λ_2 lze volit $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -\mathrm{i})$. Jemu odpovídá komplexní řešení

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)\big((0,1,0) + \mathrm{i}(0,0,-1)\big)$$

a přechodem k jeho reálné a imaginární části dostaneme dvojici reálných řešení

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}\,,\qquad \boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\ \sin 2x\\ -\cos 2x\end{pmatrix}\,.$$

---

[4]) Proužek zde značí u vektorů přechod ke komplexně sdruženým číslům „po složkách“.

Nyní již snadno napíšeme obecné řešení rovnice (15.55):

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^x \left[c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix} \right], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{15.56}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou reálné konstanty (konstantní funkce).

Má-li matice $\boldsymbol{A}$ násobná vlastní čísla, je situace často ještě složitější: K jednomu takovému vlastnímu číslu se nám nemusí podařit popsaným postupem najít dostatečný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů; viz Příklad 15.8.7. Následující postup je motivován řešením jednoduché rovnice $y' = ay$, kde $a \in \mathbb{R}$. Jejím řešením je každá funkce $y(x) = \mathrm{e}^{ax} c$ s $c \in \mathbb{R}$. Vedeni analogií můžeme se pokusit hledat řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ve tvaru $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je libovolný prvek $\mathbb{R}^n$. K tomu však potřebujeme další pojmy.

Definice 15.8.12. Je-li $\boldsymbol{B}$ libovolná matice typu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\,\boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\,\boldsymbol{B}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}\,. \tag{15.57}$$

Předchozí definice vyžaduje komentář: nekonečný součet matic chápeme „po prvcích“, jde tedy o matici, jejímiž prvky jsou součty řad. Tyto řady konvergují, protože pro

$$\boldsymbol{B} = \left(b_{jk} \right)_{j,\,k=1,\ldots,n}$$

a takové $M \in (0, \infty)$, že $|b_{jk}| \le M$ pro $j,\, k = 1, \ldots, n$, jsou absolutní hodnoty prvků matice $\boldsymbol{B}^k$ odhadnuty pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ shora číslem $n^{k-1}M^k$. Odtud plyne konvergence řady, která je prvkem matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ srovnávacím kritériem; řada, se kterou srovnáváme, má tvar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}M^k}{k\,!}\,,$$

a její konvergenci snadno ověříme např. podílovým kriteriem. Podle definice dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\boldsymbol{A}^k\,. \tag{15.58}$$

Povšimněme si, že pracujeme s maticí, jejíž prvky jsou funkce, které jsou součty mocninných řad. Odtud plyne legitimnost následujících úprav.

Derivováním (matice) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ podle proměnné x dostaneme z (15.58)

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\right)' &= \boldsymbol{A} + 2\frac{x}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + 3\frac{x^2}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + 4\frac{x^3}{4!}\,\boldsymbol{A}^4 + \cdots = \\ &= \boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \frac{x^3}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + \cdots\Big) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\,. \end{aligned} \tag{15.59}$$

Odtud vidíme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$ řešením systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$. Pro praktické využití tohoto poznatku je však nutné umět nějakým jednoduchým způsobem určit matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Obecně je těžké matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v konkretním případě určit, nicméně ve speciálních případech to možné je. Pro náš problém je důležité to, že vždy lze určit n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{v}$ tak, že řada (15.58) lze ve vyjádření $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ sečíst. Dále ukážeme, jak můžeme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ exaktně určit, pokud známe n lineárně nezávislých řešení rovnice (15.46).

Pro matice, jejichž násobení je komutativní, tj. pro něž je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ [5]), snadno obdržíme (využíváme stejnoměrné konvergence mocninných řad pro záměnu pořadí sčítání)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m}}{m!\,(k-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^m}{m!} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} ,$$

takže pro ně dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} ;$$

odtud vyplývá, že je $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{E}$, a také rovnost

$$\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x} .$$

Tak např. vzorec (15.43) z Věty 15.7.7 pro konstantní matici $\boldsymbol{A}$ nabude přehlednějšího tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-x_0)} \boldsymbol{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-t)} \boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{15.60}$$

Vzhledem k tomu, že již víme, že $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Ay}$, lze určit $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jako fundamentální matici $\boldsymbol{Y}(x)$ ze sloupcových vektorů řešení $\boldsymbol{y}_k(x)$, odpovídajících počátečním podmínkám (15.41). Z věty o jednoznačnosti vyplývá, že tak (poněkud pracně) dostaneme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K tomu se ještě vrátíme. Protože

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\, \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x} \boldsymbol{v}$$

a úpravou vyjádření $\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$ snadno obdržíme

$$\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v} = \Big(\boldsymbol{E} + \frac{\lambda x}{1!}\,\boldsymbol{E} + \frac{\lambda^2 x^2}{2!}\,\boldsymbol{E} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}\Big(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v} ,$$

vyplývá odtud $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\boldsymbol{v}$, z čehož s přihlédnutím k Definici 15.8.12 obdržíme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2 + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} \,. \tag{15.61}$$

Povšimneme si, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ je pak i pro všechna $l \in \mathbb{N}_0$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m+l}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^l\big[\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}\,\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

Odtud však plyne, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ je součet ve vyjádření (15.61) *konečný*, tj. že v rozvoji

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m-1}\Big)\,\boldsymbol{v} \tag{15.62}$$

jsou členy, odpovídající mocninám $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^k$ s $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, rovny $\boldsymbol{0}$.

[5]) Připomínáme, že násobení matic obecně *není* komutativní.

Není-li možné najít n nezávislých vlastních vektorů, je situace složitější. To nastává v případě, že násobnost některého vlastního čísla λ je větší, nežli je dimenze prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Pak můžeme pracovat s tzv. *zobecněnými vlastními vektory*, kterými doplníme již nalezené nezávislé vlastní vektory na bazi (vlastní vektory považujeme zároveň i za zobecněné vlastní vektory).

Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti k, ke kterému je třeba doplnit další zobecněné vlastní vektory, budeme postupovat takto: nalezneme nejprve vlastní vektory $\boldsymbol{v}$, které jsou lineárně nezávislými řešeními rovnice

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

Není-li těchto vektorů již k, budeme hledat všechny lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{v}$, pro které platí $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Potom pro každý takový vektor je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)$$

dalším řešením rovnice (15.46). Analogicky pokračujeme dále. Z toho vyplývá tento algoritmus:

1. Nalezneme všechny vlastní čísla a vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže má $\boldsymbol{A}$ celkem n lineárně nezávislých vlastních vektorů, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ odpovídajících n lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Všimněte si, že pak nekonečná řada pro $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v}$ s vlastním číslem λ a vlastním vektorem $\boldsymbol{v}$ obsahuje jediný nenulový člen.

2. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má celkem r, $r < n$, lineárně nezávislých vlastních vektorů. Odtud dostaneme pouze r lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Vyberme vlastní číslo λ, pro které je počet příslušných vlastních vektorů menší než jeho násobnost a najdeme všechny lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že je $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Z nich dostaneme další řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ tvaru
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)\,.$$
To postupně uděláme se všemi odpovídajícími vlastními čísly $\boldsymbol{A}$.

3. Nedostaneme-li tak již všech n potřebných řešení, hledáme dále pro příslušná λ všechny další lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že sice je $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, avšak $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Pro každý takový vektor je
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\Big)$$
dalším řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

4. Analogicky postupujeme dále, dokud takto nezískáme očekávaných n lineárně nezávislých řešení $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Následující „algebraické“ tvrzení, které nebudeme dokazovat, ukazuje, že právě popsaný algoritmus vede k nalezení n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice. Zároveň nám poskytuje i horní odhad počtu kroků, které tímto algoritmem musíme udělat, abychom dostali potřebných n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice.

Lemma 15.8.13. *Nechť charakteristický polynom P pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ má r navzájem různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_r$, takže*

$$P(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}\,,$$

kde $c \neq 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ pouze $\ell_j < k_j$ lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j. Potom má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $\ell_j + 1$ nezávislých řešení.

Obecněji, má-li rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ celkem $m_j < k_j$ nezávislých řešení, pak má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{m+1} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $m_j + 1$ nezávislých řešení.

Z Lemmatu 15.8.13 plyne existence takového d_j, $d_j \leq k_j$, pro něž má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{d_j} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň k_j lineárně nezávislých řešení (zobecněných vlastních vektorů). Tak lze ke každému vlastnímu číslu λ_j, $j = 1, 2, \dots, r$ nalézt k_j lineárně nezávislých řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Všechna tato řešení mají tvar

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} + \cdots + \frac{x^{d_j - 1}}{(d_j - 1)!}\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^{d_j - 1}\boldsymbol{v}\Big)\,.$$

Tímto způsobem lze ke k-násobnému vlastnímu číslu λ nalézt k lineárně nezávislých řešení. Dále lze ukázat, že všechna takto získaná $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ jsou lineárně nezávislá.

Za zmínku stojí, že v případě *hermitovské* matice, tj. matice, pro kterou transponovaná matice k $\overline{\boldsymbol{A}}$ je rovna $\boldsymbol{A}$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ reálná. Speciálně to platí pro reálné symetrické matice. Navíc násobnost každého vlastního čísla λ *je rovna* dimenzi prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, takže taková matice je jednoduchá.

Příklady 15.8.14. (1) Všimneme si jevu, který nám při řešení systémů působí obtíže. Jestliže řešíme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ s maticí

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

má charakteristická rovnice této matice jediný trojnásobný nulový bod $\lambda = -1$. Soustava $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má matici s hodností 1, a tedy dimenze prostoru řešení je 2 a je ostře menší než násobnost vlastního čísla $\lambda = -1$. Vlastní vektory $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyhovují jediné rovnici $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$; snadno nalezneme dva nezávislé vlastní vektory $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, 1)$. Čtenář může porovnat efektivitu jednotlivých postupů nalezení fundamentální matice.

(2) Na následujícím jednodušším příkladu ukážeme použití metody zobecněných vlastních vektorů a najdeme obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 17y_1 + 9y_2\,, \\ y_2' &= -25y_1 - 13y_2\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Pro vlastní vektory dostaneme rovnici $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, tj. systém

$$\begin{aligned} 15v^1 + \ \ 9v^2 &= 0\,, \\ -25v^1 - 15v^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Stačí tedy nalézt řešení jedné z rovnic (jsou lineárně závislé): dostaneme tak obecné řešení $\boldsymbol{v}=(v^1,\,v^2)=(-3c/5,\,c)$ a dosazením $c=5$ dostaneme vlastní vektor $\boldsymbol{v}=(-3,5)$. Nyní nalezneme zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{z}=(z^1,z^2)$ řešením soustavy

$$\begin{aligned} 15z^1 + \ \ 9z^2 &= -3\,, \\ -25z^1 - 15z^2 &= \ \ \ 5\,. \end{aligned}$$

a dostaneme $(z^1,z^2)=(-(1+3d)/5,d)$, takže pro $d=3$ dostaneme $\boldsymbol{z}=(-2,3)$. Fundamentální systém obsahuje řešení

$$\boldsymbol{y}_1(x)=\mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v}=\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x)=\mathrm{e}^{2x}(x\boldsymbol{v}+\boldsymbol{z})=\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}-3x-2\\5x+3\end{pmatrix},$$

takže obecné řešení $\boldsymbol{y}=(y^1,y^2)$ rozepsané po složkách má tvar

$$\begin{aligned} y^1 &= -3\,c_1\mathrm{e}^{2x}-(3x+2)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,, \\ y^2 &= \ \ \ 5\,c_1\mathrm{e}^{2x}+(5x+3)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$

Příklad 15.8.15. (viz [3], str. 325) Řešte počáteční problém

$$\boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}. \tag{15.63}$$

Charakteristický polynom matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

je $P(\lambda)=(2-\lambda)^3$, takže jediným vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti 3 je $\lambda_1=2$. Každý vlastní vektor $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)$ matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k $\lambda_1=2$ vyhovuje rovnici

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\,.$$

Odtud vyplývá, že $v^2=v^3=0$ a za v^1 lze volit libovolné nenulové číslo. Proto

$$\boldsymbol{y}_1(x)=\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

je jedním netriviálním řešením rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Matice $\boldsymbol{A}$ tak má jediný lineárně nezávislý vlastní vektor příslušný k $\lambda_1=2$. Hledejme proto řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $v^3 = 0$, přičemž v^1 a v^2 lze volit libovolně. Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyhovuje rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = 0$ a přitom $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq 0$. Proto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \left[\boldsymbol{E} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Tak jsme získali druhé řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, avšak rovnice $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = 0$ má pouze dvě lineárně nezávislá řešení; budeme tedy postupovat podle výše uvedeného algoritmu dále. Budeme hledat všechna řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je řešením nalezené rovnice. Jestliže zvolíme např. $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1)$, je $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Proto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_3(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}\,x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

je třetí lineárně nezávislé řešení. Obecné řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}\,x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}\right] ,$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Užitím počáteční podmínky určíme hodnoty c_1, c_2, c_3 dosazením do předcházející rovnice a obdržíme tak rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

jejím řešením dostaneme $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 1$. Řešení počáteční úlohy je tedy tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 + 5x - \frac{1}{2}x^2 \\ 2 - x \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Je-li fundamentální matice pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, klíčem k řešení rovnice, dá se očekávat, že znalost řešení, případně fundamentální matice, kterou jsme zavedli v Definici 15.7.4, nám může pomoci k určení matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K důkazu tvrzení o jejich souvislosti budeme potřebovat několik jednoduchých lemmat:

Lemma 15.8.16. *Matice $\boldsymbol{Y}$ je fundamentální maticí soustavy $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, právě když je*

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) \quad \text{a} \quad \det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0 .$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ jsou sloupcové vektory matice $\boldsymbol{Y}$. Zřejmě je

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \big(\boldsymbol{y}_1'(x), \boldsymbol{y}_2'(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n'(x)\big) , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

a také

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2(x), \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_n(x)\big) , \quad x \in \mathbb{R} . \tag{15.64}$$

Vidíme, že splnění n rovnic $\boldsymbol{y}_k'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2, \ldots, n$, je ekvivalentní se splněním jediné „maticové“ rovnice $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x)$. První část podmínky tedy zajišťuje, že sloupce matice $\boldsymbol{Y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, jsou tvořeny řešeními rovnice. Druhá část zajišťuje jejich nezávislost: podle Důsledku 15.7.5 je podmínka $\det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0$ ekvivalentní s podmínkou $\det\big(\boldsymbol{Y}(x)\big) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy i s nezávislostí sloupců matice $\boldsymbol{Y}$. □

Lemma 15.8.17. *Maticová funkce $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je fundamentální maticí soustavy popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.*

Důkaz. Tvrzení popisuje obsah rovnosti (15.59), kterou jsme již dokázali. □

Lemma 15.8.18. *Nechť $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Y}^*$ jsou fundamentální matice soustavy popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje konstantní matice $\boldsymbol{C}$, pro kterou je*

$$\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Důkaz. Sloupce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ matice $\boldsymbol{Y}$ jsou nezávislá řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Proto každé z řešení $\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \ldots, \boldsymbol{y}_n^*$ je lineární kombinací

$$\boldsymbol{y}_j^* = c_{j1}\boldsymbol{y}_1 + c_{j2}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_{jn}\boldsymbol{y}_n , \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{15.65}$$

Nechť $\boldsymbol{C}$ je matice $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, kde

$$\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix} ;$$

pak n rovnic (15.65) je ekvivalentních maticové rovnici $\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}$, $x \in \mathbb{R}$, čímž je lemma dokázáno. □

Věta 15.8.19. *Nechť* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(x)$ *je fundamentální matice systému popsaného rovnicí* $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{15.66}$$

tj. součin libovolné fundamentální matice $\boldsymbol{Y}$ *rovnice* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ *s maticí k ní inverzní vyčíslenou v bodě* 0 *dává vždy matici* $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{Y}$ fundamentální matici rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje podle Lemmat 15.8.17 a 15.8.18 konstantní matice $\boldsymbol{C}$ tak, že je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{C}\,.$$

Dosaďme do této rovnosti $x = 0$. Z $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y}(0)\,\boldsymbol{C}$ vyplývá, že $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Y}^{-1}(0)$, což již dává dokazovanou rovnost. □

Další metody pro výpočet matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ nalezne čtenář např. v knize [8]. Ukážeme si aplikaci dokázaného tvrzení.

Příklad 15.8.20. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme charakteristickou rovnici soustavy:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0\,.$$

Řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

kterou snadno upravíme na ekvivalentní systém dvou nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} -\,2\,v^1 + \ v^2 - v^3 &= 0 \\ 3\,v^2 + v^3 &= 0 \end{aligned}$$

určíme jeden (nezávislý) vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1,\, v^2,\, v^3)$ příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = 3$: $\boldsymbol{v} = (2,\, 1\,, -3)$. Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 2$ dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

ze které získáme ekvivalentní systém rovnic

$$\begin{aligned} -\,v^1 + \ v^2 - v^3 &= 0 \\ -\,v^1 \qquad - v^3 &= 0 \end{aligned}$$

s jediným dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1)$. Musíme tedy sáhnout k hledání zobecněného vlastního řešení: budeme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

S touto rovnicí ekvivalentní soustava se redukuje na jedinou lineární rovnici

$$v^1 \qquad + v^3 = 0$$

s dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1, 1, -1)$. Přejdeme od nezávislých zobecněných vlastních vektorů k lineárně nezávislým řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & x & -x \\ -x & 1 & -x \\ 2x & -x & 1+2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ -1-x \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & (1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^{2x} \\ -3\,\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{2x} & -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Vypočteme její hodnotu v bodě 0 a k takto vzniklé matici spočteme matici inverzní:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosadíme do vzorce (15.66), čímž dostaneme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v „uzavřeném tvaru“, tedy nikoli ve formě nekonečné řady:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Toho můžeme využít k dořešení úlohy (srovnejte s prvním členem ve vzorci (15.60)): hledané řešení $\boldsymbol{y}$ vyhovující dané počáteční podmínce je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \\ -x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

K tomuto příkladu se ještě jednou vrátíme; pro srovnání ho spočteme jinou metodou.

Poznámka 15.8.21. Protože jsme převáděli řešení lineární rovnice n-tého řádu na řešení speciálního systému 1. řádu, lze tušit, že mezi oběma problémy je úzká souvislost. To lze využít i při výpočtu fundamentální matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Výsledek uvedeme pro informaci bez důkazu:

Věta 15.8.22. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $n \times n$ a nechť*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

je její charakteristická rovnice. Nechť y je řešení diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0, \;\; y^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Potom platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = z_1(x)\boldsymbol{E} + z_2(x)\boldsymbol{A} + \cdots + z_n(x)\boldsymbol{A}^{n-1}\,,$$

kde $z_k = z_k(x)$ obdržíme z řešení $y = y(x)$ transformací

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy umět řešit jen rovnice n-tého řádu a znát tuto větu. U systému rovnic je situace v případě násobných kořenů charakteristické rovnice často komplikovanější než u jediné rovnice vyššího řádu, kde je výsledek relativně jednoduchý.

Pro řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ lze užít také *Jordanova kanonického tvaru* matice $\boldsymbol{A}$. To je *výhodné* vzhledem ke znalostem získaným eventuálně již dříve v rámci studia algebry. Jak bylo již zmíněno, tato partie je s množstvím příkladů zpracována v [2], omezíme se proto jen na základní popis metody, která je tam detailně popsána. Poznamenejme, že trochu odlišný tvar Jordanových buněk (s jedničkami „pod diagonálou") není podstatný. Připomeňme, že dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{C}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\,.$$

Mezi všemi maticemi podobnými matici $\boldsymbol{A}$ hraje významnou roli její Jordanův kanonický tvar. Připomeňme, že čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jordanova buňka*. Diagonální bloková matice, bloky na jejíž diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá *Jordanova matice*. Je známo, že každá matice s reálnými prvky je podobná jisté Jordanově matici, avšak nad tělesem komplexních čísel. Tato Jordanova matice je určena až na pořadí Jordanových buněk na diagonále jednoznačně. Zkráceně říkáme, že každá taková matice má Jordanův kanonický tvar. Metoda nalezení Jordanova kanonického tvaru matice $\boldsymbol{A}$ a příslušné transformační matice $\boldsymbol{C}$ je součástí látky probírané v základním kursu lineární algebry.

Řešíme-li rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, nalezneme Jordanův kanonický tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ spolu s maticí $\boldsymbol{C}$, pro kterou $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, resp. $\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Položíme-li $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je pak rovnost $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ekvivalentní s rovností

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}\,,$$

a tedy s rovností $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$. Rovnice se tak rozpadne na menší systémy, které odpovídají jednotlivým Jordanovým buňkám. Tyto soustavy již snadno řešíme. Tak např. Jordanově buňce

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

odpovídá systém rovnic

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + z_2\,, \\ z_2' &= \qquad \lambda z_2 + z_3\,, \\ z_3' &= \qquad\qquad \lambda z_3 + z_4\,, \\ z_4' &= \qquad\qquad\qquad \lambda z_4\,, \end{aligned}$$

jehož řešení je, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem, tvaru (řešíme zde „odzadu“)

$$\begin{aligned} z_4 &= a\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_3 &= (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_2 &= \left(\frac{ax^2}{2} + bx + c\right)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_1 &= \left(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d\right)\mathrm{e}^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Pro obecnou Jordanovu buňku si čtenář snadno řešení představí. Tak postupně nalezneme řešení, odpovídající všem Jordanovým buňkám a sestrojíme tak řešení $\boldsymbol{z}$. Tím ovšem řešení systému nekončí, musíme ještě provést „zpětnou transformaci“ a přejít tak od řešení systému $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$ k řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Protože $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$.

Příklad 15.8.23. Vrátíme se nyní k úloze, kterou jsme řešili v Příkladu 15.8.20 a spočteme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jinak, pomocí převodu na Jordanův tvar. Připomeňme, že matice $\boldsymbol{A}$ byla dána ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a že jsme určili její vlatní čísla $\lambda = 3$ s násobností 1 a $\lambda = 2$ s násobností 2; vlastnímu číslu 2 odpovídá jediný nezávislý vlastní vektor. Jordanův tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ pak je (pořadí buněk na diagonále si můžeme zvolit, avšak to ovlivní transformační matici $\boldsymbol{C}$, kterou musíme určit [6])

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Tento tvar jsme určili snadno též díky rozměru matice (viz [3]), potřebujeme však ještě transformační matici $\boldsymbol{C}$ a také i $\boldsymbol{C}^{-1}$. Z rovnice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

určíme úpravami známými z algebry

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Protože

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

plyne odtud

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} .$$

Čtenář si může jen ztěží udělat obrázek o pracnosti jednotlivých uvedených postupů z několika málo příkladů, které jsme uvedli. Volba těchto postupů je vždy podmíněna tím, co řešitel úlohy lépe ovládá. Řadu řešených příkladů lze nalézt např. v [14].

Vyřešili jsme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ pro speciální případ $\boldsymbol{b}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ a máme k dispozici metodu variace konstant, pomocí níž můžeme řešit systém i v případě obecné vektorové funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Avšak tento postup může být velmi pracný; v případě lineární rovnice n-tého řádu jsme pro speciální tvar „pravé strany“ rovnice $\boldsymbol{b}(x)$ použili často méně pracnou metodu porovnávání koeficientů, která navíc „obcházela“ integraci. I zde je takový postup možný a je analogický, i když nepatrně složitější. Platí toto tvrzení: *Jestliže jsou složky vektoru $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x)$ polynomy stupně nejvýše r-tého a jestliže* 0 *je k-násobným kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, pak existuje partikulární řešení systému*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) , \tag{15.67}$$

[6]) Pokud známe vlastní čísla matice, nelze z nich u rozměrnějších matic určit tvar matice $\boldsymbol{J}$. Proto je dobré transformační matici určovat souběžně s převodem na Jordanův tvar.

jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$*-tého.* Poznamenejme, že $k = 0$, právě když determinant $\det(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ není roven 0. Proti případu jedné lineární rovnice n-tého řádu se mohou ve složkách řešení vyskytovat s nenulovými koeficienty i mocniny stupně *menšího než* k. Rovněž není bez zajímavosti, že tvrzení platí i pro „komplexní případ".

Nebudeme uvádět speciální tvar partikulárního řešení pro případ, že složky vektoru $\boldsymbol{b}$ obsahují polynomiální násobky goniometrických funkcí a zformulujeme výsledek jen pro „komplexní případ": *Nechť v rovnici* (15.67) *je vektor* $\boldsymbol{b}$ *tvaru* $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{Q}_r(x)$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$*, kde složky vektoru* $\boldsymbol{Q}_r$ *jsou (obecně komplexní) polynomy stupně nejvýše* r*-tého. Potom existuje řešení* $\boldsymbol{y}$ *systému* (15.67) *tvaru*

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{R}_{r+k}(x)\,,$$

kde $\boldsymbol{R}_{r+k}$ *je matice, jejímiž prvky jsou polynomy stupně nejvýše* $(r+k)$*-tého a kde* k *je násobnost čísla* λ *jakožto kořene charakteristického polynomu matice* $\boldsymbol{A}$. Poznamenejme konečně na závěr této části, že i v tomto případě můžeme využít princip superpozice k rozkladu $\boldsymbol{b}$ na takové vektory, na které lze aplikovat předcházející tvrzení na každý zvlášť.

15.9 Autonomní systémy

V tomto odstavci se budeme krátce zabývat stabilitou řešení, avšak pouze pro tzv. autonomní systémy. Jsou to systémy tvaru (15.17), v nichž pravá strana nezávisí na proměnné x. I v případě, že je neumíme řešit, existují možnosti, jak se o chování jejich řešení alespoň ve speciálních případech některé věci dozvědět.

Budeme tedy studovat autonomní systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\,. \tag{15.68}$$

Pro potřeby tohoto závěrečného odstavce dále předpokládáme, že všechna řešení, se kterými pracujeme, jsou spojitě rozšířena do bodu 0 a jsou to tedy funkce definované na neomezeném intervalu $[0, +\infty)$. Popišme otázky, které nás zajímají:

(A) Existuje konstantní řešení, které reprezentuje *rovnovážný stav* systému, tj. takové $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$, pro které je $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ pro všechna $x > 0$?

(B) Nechť $\boldsymbol{y}_1$ je řešením rovnice (15.68) a nechť $\boldsymbol{y}_2$ je takové řešení (15.68), pro které je v bodě 0 norma rozdílu $\|\boldsymbol{y}_1(0) - \boldsymbol{y}_2(0)\|$ „malá". Bude $\boldsymbol{y}_2(x)$ také „blízko" $\boldsymbol{y}_1(x)$ i pro všechna $x > 0$?

(C) Pokud řešení (15.68) existuje na nějakém intervalu $(0, +\infty)$, jak se chová pro $x \to +\infty$? Existuje např. nějaký rovnovážný stav $\boldsymbol{y}^0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) je $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$?

Otázka (A) není těžká. Má-li $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ být řešením systému (15.68), pak je $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$, a tedy: $\boldsymbol{y}^0$ *je rovnovážným stavem systému* (15.68)*, právě když je*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Otázka (B) je složitější. Vyžaduje především *přesnější popis* problému, který poskytuje následující definice: