MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2012 Jan Král

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Geometrické úlohy vedoucí na diferenciální rovnice

Bakalářská práce

Jan Král

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc. **Brno 2012**

Bibliografický záznam

Autor:	Jan Král Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Geometrické úlohy vedoucí na diferenciální rovnice
Studijní program:	Aplikovaná matematika
Studijní obor:	Matematika - ekonomie
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Akademický rok:	2011/2012
Počet stran:	viii + 51
Klíčová slova:	diferenciální rovnice; geometrické úlohy; derivace; křivka; tečna; normála

Bibliographic Entry

Author:	Jan Král Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Geometric Problems solved using differential equations
Degree Programme:	Applied Mathematics
Field of Study:	Mathematics - Economy
Supervisor:	prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Academic Year:	2011/2012
Number of Pages:	viii + 51
Keywords:	differencial equations; geometric problems; differentiation; curve; tangent; normal

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme studiu geometrických úloh, jejichž řešení vede na diferenciální rovnice prvního řádu. Pozornost je věnována zejména úlohám hledání křivek, jejichž tečna nebo normála splňují některou specifickou vlastnost.

Abstract

In this thesis we study geometric problems which can be solved using differential equations. In particular, we study problems leading to seeking curves whose tangens or normals fulfil some special conditions.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Jan Král**

Studijní program - obor: **Aplikovaná matematika - Matematika - ekonomie**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Geometrické úlohy vedoucí na řešení diferenciálních rovnic

Geometric problems solved using differential equations

Oficiální zadání: Vypracujte text zaměřený na řešení rozličných geometrických úloh pomocí diferenciálních rovnic 1. řádu. Zaměřte se především na úlohy, kde vystupují tečna a normála k dané rovinné křivce a na úlohy vedoucí na popis ortogonálních resp. izogonálních trajektorií k danému systému křivek. V přípravné části textu stručně shrňte základní geometrické pojmy v rovině a jejich vztah k pojmům ze základního kurzu matematické analýzy.

Literatura: Doporučená literatura

Berman, G. N. Sbornik zadač po kurzu matematičeskogo analiza. 4. vyd. Moskva : GITTL, 1951. 528 s. : i., Ráb, Miloš. Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. 2.přepracované vydání. Brno : vydala Masarykova univerzita v Brně-PřF, 1998. 96 s. ISBN 80-210-1818-6., Demidovič, Boris Pavlovič. Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Translated by Miroslav Rozložník - Miroslav Tůma. 1. vyd. Havlíčkův Brod : Fragment, 2003. 460 s. ISBN 80-7200-587-1.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.

Datum zadání bakalářské práce: květen 2011

Datum odevzdání bakalářské práce: dle harmonogramu ak. roku 2011/2012

V Brně dne 31.10.2011

v. z.

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Zadání bakalářské práce převzal dne: 5.12.2011

Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat panu prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc. za odborné vedení bakalářské práce, vstřícnost, cenné rady a připomínky a především za trpělivost a čas, který mi věnoval. Dále bych rád poděkoval panu RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D. z Univerzity Palackého v Olomouci za stylistické připomínky a rady ke struktuře práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 7. května 2012 ....

Jan Král

Obsah

Úvod **viii**

1 Základy diferenciálního počtu **1**
1.1 Derivace a její geometrický význam 1
1.2 Tečna a normála ke grafu funkce 2
1.3 Derivace implicitně zadané funkce dvou proměnných 3

2 Diferenciální rovnice 1. řádu **4**
2.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými 4
2.2 Homogenní rovnice 5
2.3 Lineární diferenciální rovnice 7
2.4 Bernoulliova rovnice 8
2.5 Exaktní rovnice 9
2.6 Clairautova rovnice 10
2.7 Izogonální a ortogonální trajektorie 11

3 Geometrické úlohy **14**
3.1 Řešené příklady 14
3.2 Neřešené příklady 48
3.3 Výsledky neřešených příkladů 50

Úvod

Tato práce se zabývá řešením geometrických úloh vedoucích na diferenciální rovnice prvního řádu. Práce se skládá ze tří kapitol: Základy diferenciálního počtu (kapitola 1), Diferenciální rovnice 1. řádu (kapitola 2), Geometrické úlohy (kapitola 3). K vytvoření práce mě vedla snaha vytvořit text, který ukazuje některé jednoduché aplikace diferenciálních rovnic.

V první kapitole stručně uvádím definici derivace a na jejím základě ukazuji její geometrický význam. Součástí první kapitoly je dále pasáž o tečných a normálách křivek a věta o derivaci implicitně zadané funkci dvou proměnných.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny základní typy diferenciálních rovnic prvního řádu a stručný popis jejich řešení demonstrovaný na konkrétních příkladech. Cílem této kapitoly je, aby byl čtenář neobeznámený s metodami řešení diferenciálních rovnic schopen porozumět řešení diferenciálních rovnic obsažených v geometrických úlohách (viz kapitola 3). Hlavním zdrojem zadání diferenciálních rovnic v této kapitole je [2]. Součástí kapitoly je také odvození diferenciálních rovnic sloužících k nalezení izogonálních resp. ortogonálních trajektorií systémů křivek.

Třetí kapitola tvoří jádro práce. Uvádím v ní řešené geometrické úlohy, které vedou (s výjimkou řešeného příkladu č. 2 a neřešených příkladů č. 2 a 3) na řešení diferenciálních rovnic 1. řádu. V úlohách vystupují zejména tečna a normála křivek, část úloh (úlohy 19-23) je zaměřena na hledání izogonálních (resp. ortogonálních) trajektorií. Cílem řešeného příkladu č. 2 a neřešených příkladů č. 2 a 3 je procvičení geometrické a početní orientace při práci s tečnami a normálami (v rámci příkladů se dokazuje případně ověřuje nějaké tvrzení). Základním zdrojem, ze kterého jsem při tvorbě této kapitoly čerpal, byl [2]. U řešených příkladů 6, 7, 9, 14-16, 18, 20 jsem převzal zadání z [2], řešení úloh je pak moje vlastní. Úlohu 24 jsem převzal ze zdroje [5] (v tomto zdroji je uvedeno i její řešení, pro účely práce jsem jej ale přepracoval, upravil a doplnil). Zbývající řešené úlohy jsou pak z velké části mnou vymyšlené (nalezené zkoumáním, případně vzniklé modifikací úloh např. ze zdroje [2]). Na konci kapitoly jsou uvedeny neřešené příklady a jejich výsledky (zadání ze zdroje [5] převzato u příkladů 9-11, 13, jinak se jedná převážně o moji tvorbu).

Konec řešení je u každého řešeného příkladu označen znakem ■. U čtenářů se předpokládá znalost diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné.

Kapitola 1

Základy diferenciálního počtu

1.1 Derivace a její geometrický význam

Definice: Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.1}$$

nazýváme tuto limitu *derivací* funkce f v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$.

Uvažujme nyní směrnici k obecné přímky $y = kx + q$, procházející body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$, $x_0 \neq x_1$. Platí

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírá přímka s kladným směrem osy x. Rovnice této přimky je

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Předpokládejme nyní, že tato přímka je sečnou grafu známé funkce f a je určena bodem $[x_0, f(x_0)]$ této funkce a dalším libovolným bodem grafu $[x, f(x)]$. Směrnice této přímky je

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Rozumíme-li tečnou s bodem dotyku $T\,[x_0, f(x_0)]$ limitní polohu uvažované sečny, kdy se bod x blíží bodu x_0, bude její směrnice

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což se shoduje s definicí (1.1) derivace funkce f v jejím bodě $x = x_0$. Připomeňme, že φ označuje úhel, který tato tečna svírá s kladným směrem osy x. Je vidět, že geometrický význam derivace funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je směrnice tečny ke grafu funkce f vedené tímto bodem.

1.2 Tečna a normála ke grafu funkce

Uvažujme funkci $f = f(x)$. Využijeme-li faktu, že geometrický význam derivace $f'(x_0)$ v bodě $[x_0,\, f(x_0)]$ funkce f je směrnice k tečny $y = kx + q$ vedené bodem x_0 (přesněji bodem $[x_0,\, f(x_0)]$, pokud však v dalším textu práce bude zřejmé o jakou funkci f se jedná, budeme se odvolávat pouze na x-ovou souřadnici bodu), získáme rovnici tečny ke grafu funkce f v jejím bodě x_0 (s využitím $f(x) = y$ budeme místo $f(x)$ v dalším textu psát y):

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \tag{1.2}$$

Uvažujme dále normálu ke grafu funkce f vedenou bodem x_0. Jelikož dvě přímky jsou kolmé právě tehdy, když součin jejich směrnic je roven -1, musí totéž platit pro tečnu a normálu vedené společným bodem x_0. Využijeme-li tento fakt a nahradíme v rovnici (1.2) výraz y' výrazem $-\frac{1}{y'}$, získáme rovnici normály ke grafu funkce f vedené jejím bodem $[x_0,\, y_0]$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \tag{1.3}$$

Určeme dále úseky, které vytíná tečna resp. normála na souřadných osách. Nejprve uvažujme průsečíky tečny (vedené bodem $[x_0,\, y_0]$ křivky $y = f(x)$) se souřadnými osami. Dosadíme-li body $[\bar{x},\, 0]$ a $[0,\, \bar{y}]$ do rovnice (1.2) a vyjádříme z těchto dosazení postupně $\bar{x}$ a $\bar{y}$, dostaneme:

$$\bar{x} = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, \tag{1.4}$$

$$\bar{y} = y_0 - x_0 \cdot y'(x_0). \tag{1.5}$$

V takto získaných vyjádřeních je $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) x-ová (resp. y-ová) souřadnice průsečíku tečny a osy x (resp. osy y). Dále $|\bar{x}|$ (resp. $|\bar{y}|$) udává délku úseku vyťatého tečnou křivky na ose x (resp. ose y). Podobně pro normálu lze uvažovat její průsečíky s osami, které označíme $[\widetilde{x},\, 0]$ a $[0,\, \widetilde{y}]$. Dosazením těchto souřadnic do rovnice (1.3) a vyjádřením $\widetilde{x}$ a $\widetilde{y}$ dostaneme:

$$\widetilde{x} = x_0 + y_0 \cdot y'(x_0), \tag{1.6}$$

$$\widetilde{y} = y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)}. \tag{1.7}$$

V těchto vyjádřeních je $\widetilde{x}$ (resp. $\widetilde{y}$) x-ová (resp. y-ová) souřadnice průsečíku normály křivky a osy x (resp. osy y). Dále $|\widetilde{x}|$ (resp. $|\widetilde{y}|$) udává délku úseku vyťatého touto normálou na ose x (resp. ose y).

Pro úplnost uvažujme ještě směrnici tečny křivky zadané parametricky. Je-li graf funkce f křivka zadaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, pak za předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ je tato funkce v okolí bodu $t = t_0$ prostá. Tedy v bodě t_0 existuje inverzní funkce φ^{-1}. V okolí bodu t_0 dále platí $t = \varphi^{-1}(x)$, odkud $y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$. Derivováním a využitím věty o derivaci inverzní funkce získáme:

$$y' = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Dosazením $t = t_0$ pak získáme vztah pro směrnici tečny křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ v jejím bodě $[\varphi(t_0),\, \psi(t_0)]$:

$$y'(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{1.8}$$

1.3 Derivace implicitně zadané funkce dvou proměnných

Uvažujme rovinnou křivku, jejíž rovnici nelze upravit na tvar $y = f(x)$. Pro výpočet derivace y' pak použijeme následující větu:

Věta: Nechť je dána funkce dvou proměnných $F(x,\, y) = 0$ a nechť F má v nějakém okolí bodu $[x_0,\, y_0]$ spojité parciální derivace F'_x a F'_y a dále nechť $F'_y(x_0,\, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}$ a existuje právě jedna funkce f definovaná na tomto okolí taková, že $f(x_0) = y_0$, $F\left(x,\, f(x)\right) = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$ a na $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ má f spojitou derivaci, pro kterou platí

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,\, y)}{F'_y(x,\, y)}, \tag{1.9}$$

kde $y = f(x)$. O funkci f stručně hovoříme jako o *implicitně zadané funkci.*

Funkci dvou proměnných lze derivovat také tak, že derivujeme rovnost bez vyjádření y a na y se díváme jako na „složenou funkci“, která je implicitním zadáním x. Z takto vzniklé rovnice pak vyjádříme y'.

Příklad: Určete derivaci y' implicitně zadané funkce $x^2 + xy - 2y^3 = y^2$.

Řešení. Rovnici zderivujeme a na y se díváme jako na implicitní funkci x:

$$2x + y + xy' - 6y^2y' = 2yy'.$$

Za zvláštní zmínku stojí fakt, že xy jsme derivovali podle vzorce pro derivaci součinu. Ze vzniklé rovnice vyjádříme y':

$$y' = \frac{2x + y}{6y^2 + 2y - x}.$$

Výsledek odpovídá derivování podle vzorce (1.9). ■

Kapitola 2

Diferenciální rovnice 1. řádu

Diferenciální rovnice prvního řádu jsou obecně rovnice $F(x,\, y(x),\, y'(x)\,) = 0$. V rámci rovnice je možné u řešení diskutovat podmínku $y(a) = b$, neboli požadavek, aby řešení rovnice procházelo bodem $[a,\, b]$. Této úloze se pak říká počáteční úloha (nebo tzv. Cauchyho problém), řešení je konkrétní křivka (křivky) a takové řešení nazýváme partikulární řešení. Obecně je řešení diferenciální rovnice prvního řádu závislé na volbě konstanty K. O takovém řešení rovnice hovoříme jako o tzv. obecném řešení. V případě, že je nějaká další funkce řešením diferenciální rovnice, ale z obecného řešení ji není možné získat žádnou volbou konstanty K, hovoříme o singulárním řešení rovnice.

2.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Rovnice se separovanými proměnnými jsou rovnice tvaru $y' = f(x) \cdot g(y)$. Tyto rovnice řešíme tak, že y' rozepíšeme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a rovnici upravíme do tvaru $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$, kdy obě strany rovnice zintegrujeme. Pokud má rovnice $g(y) = 0$ řešení, je potřeba zvlášť vyšetřit, zda se jedná o singulární řešení rovnice (tato řešení nemusí být zahrnuta v obecném řešení rovnice).

Příklad: Řešte rovnici $y \ln y + xy' = 0$.

Řešení. Derivaci y' rozepíšeme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a obě strany rovnice upravujeme:

$$y \ln y + x\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

$$-\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int \tfrac{\mathrm{d}y}{y \ln y}.$$

Nyní zintegrujeme obě strany rovnice. Integrál na levé straně rovnice je elementární, integrál na pravé straně rovnice řešíme pomocí substituce $t = \ln y$. Výsledky dále upravujeme:

$$-\ln|x| = \ln|\ln y| + c,\; c \in \mathbb{R},$$

$$\ln \tfrac{1}{|x|} = \ln|\ln y| + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Výraz e^c nahradíme konstantou K, která nabývá pouze kladných hodnot a s využitím pravidel pro počítání s logaritmy dále upravujeme:

$$\ln \tfrac{1}{|x|} = \ln(K\,|\ln y|),\ K > 0,$$

$$\tfrac{1}{|x|} = K\,|\ln y|\,,\ K > 0.$$

Odstraněním absolutních hodnot se současným povolením záporných hodnot konstanty K získáme řešení rovnice:

$$\tfrac{1}{x} = K \ln y,\ K \in R \setminus \{0\}.$$

Hodnota $K = 0$ je v tuto chvíli pro konstantu K nepřípustná, protože odstraněním absolutních hodnot jsme k možným hodnotám K přidali všechny možné hodnoty $-K$, ale tímto způsobem jsme nepřidali hodnotu 0.

Nyní je potřeba uvážit rovnici $y \ln y = 0$, kterou jsme kvůli podmínce dané jmenovatelem zlomku byli až dosud nuceni vyloučit z uvažovaných hodnot y. Tato rovnice má dvě řešení. První řešení je $y = 0$, které ale kvůli definičnímu oboru logaritmu nevyhovuje zadání (nulu nelze dosadit). Druhé řešení $y = 1$ (které je ekvivalentní s rovnicí $\ln y = 0$) je (jak lze snadno ověřit dosazením do zadání) řešením původní diferenciální rovnice. Toto řešení lze ale získat volbou $K = 0$, proto o tuto hodnotu rozšíříme možné hodnoty konstanty K.

Celkově je tedy $\frac{1}{x} = K \ln y,\ K \in \mathbb{R}$, odkud lze obecné řešení rovnice vyjádřit jako $y = \mathrm{e}^{-Kx},\ K \in \mathbb{R}$. ■

2.2 Homogenní rovnice

Homogenní rovnice jsou rovnice, které mohou být zapsány ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$. Tyto rovnice řešíme použitím substituce $z = \frac{y}{x}$ čímž získáme rovnici se separovanými proměnnými. Podrobněji si tento postup ukážeme na příkladu:

Příklad: Řešte rovnici $x^2 + y^2 = 2xyy'$.

Řešení. Rovnici v zadání je potřeba vynásobit výrazem $\frac{1}{x^2}$ aby bylo patrné, že jde o homogenní rovnici:

$$1 + \tfrac{y^2}{x^2} = 2\tfrac{y}{x}y'.$$

Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y = zx$ a $y' = z'x + z$. Po dosazení do rovnice získáme novou rovnici, kterou budeme dalšími úpravami převádět na rovnici se separovanými proměnnými a dále upravíme:

$$1 + z^2 = 2z(z'x + z),$$

$$1 + z^2 = 2zx\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2z^2,$$

$$\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2z}{1-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Nyní zintegrujeme obě strany rovnice:

$$\textstyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-2z}{1-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Integrál na levé straně rovnice je elementární, v případě integrálu na pravé straně je v čitateli zlomku derivace jmenovatele, čehož lze využít pro integraci:

$$\ln|x| = -\ln|1 - z^2| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

S využitím stejného postupu jako v příkladu řešeném v rámci rovnic se separovanými proměnnými dále získáváme:

$$\ln|x| = \ln\tfrac{1}{|1-z^2|} + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\ln|x| = \ln\tfrac{\widetilde{K}}{|1-z^2|},\ \widetilde{K} > 0,$$

$$|x| = \tfrac{\widetilde{K}}{|1-z^2|},\ \widetilde{K} > 0,$$

$$x = \tfrac{\widetilde{K}}{1-z^2},\ \widetilde{K} \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$1 - z^2 = Kx,\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Konstantu K jsme z $\widetilde{K}$ získali jako $K = \frac{1}{\widetilde{K}}$. V průběhu řešení rovnice jsme kvůli podmínce dané jmenovatelem byli nuceni předpokládat, že $z^2 \neq 1$, ale dosazením $z = \pm 1$ do zadání rovnice po substituci je vidět, že se také jedná o řešení rovnice. Díky úpravě konstanty $K = \frac{1}{\widetilde{K}}$ lze tato řešení z obecného řešení získat volbou konstanty $K = 0$, tudíž konstanta K může nabývat libovolné reálné hodnoty.

Nyní je potřeba ještě zpětné dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$. Dosazením do námi získaného řešení získáme obecné řešení rovnice ve tvaru $1 - \frac{y^2}{x^2} = Kx,\ K \in \mathbb{R}$.

■

2.3 Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnicí nazýváme rovnici tvaru $y' - a(x)y = b(x)$. Řešit tuto rovnici lze dvěma způsoby. Jedna z možností je metoda variace konstanty, druhá možnost je metoda integračního faktoru. Jelikož v rámci geometrických úloh v kapitole 3 je používána metoda integračního faktoru, popíšeme pouze ji. Metoda variace konstanty je popsána např. v [1].

Při řešení metodou integračního faktoru nejprve rovnici upravíme na tvar

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{2.1}$$

Obě strany rovnice pak vynásobíme výrazem $e^{-\int a(x)\,dx}$, který se nazývá integrační faktor. Rovnici lze potom upravovat takto:

$$y'\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - a(x)y\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x},$$

$$(y\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x})' = b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x},$$

$$y\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int \left(b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)\,\mathrm{d}x + K,\ K \in \mathbb{R},$$

$$y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int \left(b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)\,\mathrm{d}x + K\right],\ K \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y' = a(x)y + b(x)$.

Příklad: Řešte počáteční úlohu $y' - \frac{x+1}{x}y = x^2$, $y(1) = -2$.

Řešení. Rovnice v zadání je ve tvaru (2.1), tudíž je ve tvaru, kdy ji budeme násobit integračním faktorem. Nejprve nalezneme integrační faktor:

$$\mathrm{e}^{-\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\int (1+\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x-ln\,x} = \mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-ln\,x} = \mathrm{e}^{-x}\cdot\tfrac{1}{x}.$$

Tímto integtačním faktorem vynásobíme obě strany diferenciální rovnice a dále upravujeme:

$$y'\tfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-x} - y\tfrac{x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x},$$

$$\left(y\tfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-x}\right)' = x\mathrm{e}^{-x},$$

$$\tfrac{y}{x}\mathrm{e}^{-x} = \int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

K vyřešení integrálu na pravé straně rovnice použijeme metodu per partes:

$$\tfrac{y}{x}\mathrm{e}^{-x} = \int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}(-x-1) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Dalšími úpravami získáme:

$$\frac{y}{x}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-x-1) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}(-x-1) + cx\mathrm{e}^{x},\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = -x^2 - x + cx\mathrm{e}^{x},\ c \in \mathbb{R},$$

což je obecné řešení diferenciální rovnice. Nyní ještě nalezneme partikulární řešení splňující podmínku $y(1) = -2$. Dosadíme-li v obecném řešení za x hodnotu 1 a za y hodnotu 2, získáme rovnici $-2 = -1 - 1 + c \cdot \mathrm{e}$, ze které plyne $c = 0$. Tudíž námi hledané partikulární řešení je $y = -x^2 - x$. ■

Při řešení diferenciálních rovnic je někdy výhodnější zaměnit proměnné a získat diferenciální rovnici, ve které vystupuje x'. Toho lze docílit využitím vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'}$.

V následujícím příkladu si uvedeme rovnici, která po zaměnění proměnných přejde na lineární diferenciální rovnici:

Příklad: Metodou záměny proměnných řešte rovnici $(\mathrm{e}^y - x)y' = y$.

Řešení. Nejprve rovnici přepíšeme tak, aby v ní vystupovalo x':

$$\mathrm{e}^y - x = yx'.$$

Tato rovnice je lineární diferenciální. Ze tvaru $x' + \frac{x}{y} = \frac{\mathrm{e}^y}{y}$ je vidět, že integrační faktor bude $e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}} = e^{\ln y} = y$. Po vynásobení obou stran rovnice integračním faktorem dále upravujeme:

$$x'y + x = \mathrm{e}^y,$$

$$(xy)' = \mathrm{e}^y,$$

$$xy = \int e^y \,\mathrm{d}y = e^y + c,\ c \in \mathbb{R},$$

odkud již získáme obecné řešení diferenciální rovnice ve tvaru $x = \frac{\mathrm{e}^y + c}{y}$, $c \in \mathbb{R}$. ■

2.4 Bernoulliova rovnice

Bernoulliova rovnice je rovnice tvaru $y' + a(x)y = b(x)y^r$, $r \neq 0$, $r \neq 1$. Jestliže $r = 0$ nebo $r = 1$, jde o lineární diferenciální rovnici. V opačném případě vydělíme rovnici výrazem y^r a použijeme substituci $z = \frac{1}{y^{r-1}}$, která převede rovnici na lineární diferenciální.

Příklad: Řešte rovnici $y' = 4\frac{y}{x} + x\sqrt{y}$.

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $y' + a(x)y = b(x)y^r$ a vydělíme výrazem $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - 4\frac{\sqrt{y}}{x} = x.$$

Zavedeme substituci $z = \sqrt{y}$, ze které vyjádříme $z' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y'}{\sqrt{y}}$, odkud $y' = 2z'\sqrt{y}$. Dalšími úpravami získáme

$$2z' - 4\tfrac{z}{x} = x,$$

$$z' - 2\tfrac{z}{x} = \tfrac{1}{2}x,$$

což je lineární diferenciální rovnice, kterou vyřešíme metodou integračního faktoru. Nejprve nalezneme integrační faktor:

$$\mathrm{e}^{-2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\ln x} = (\mathrm{e}^{\ln x})^{-2} = x^{-2} = \tfrac{1}{x^2}.$$

Po vynásobení obou stran diferenciální rovnice integračním faktorem dále upravujeme:

$$\tfrac{z'}{x^2} - 2\tfrac{z}{x^3} = \tfrac{1}{2x},$$

$$\left(\tfrac{z}{x^2}\right)' = \tfrac{1}{2x},$$

$$\tfrac{z}{x^2} = \int \tfrac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$z = \tfrac{1}{2}x^2\ln|x| + cx^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

Po zpětném dosazení substituce $z = \sqrt{y}$ získáváme obecné řešení diferenciální rovnice ve tvaru $\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2\ln|x| + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$. Na začátku postupu při dělení rovnice výrazem $\sqrt{y}$ jsme ovšem byli nuceni příjmout podmínku $y \neq 0$. Dosazením funkce $y = 0$ do zadání lze snadno ověřit, že jde o singulární řešení (nelze jej získat žádnou volbou konstanty c). ■

2.5 Exaktní rovnice

Exaktní diferenciální rovnice je rovnice tvaru $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ za současného splnění podmínky $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, přičemž tyto parciální derivace jsou spojité. V takovém případě existuje kmenová funkce $F(x, y)$, pro kterou platí, že výraz na levé straně diferenciální rovnice je úplným diferenciálem funkce $F(x, y)$, tj. $\mathrm{d}F(x, y) = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y = 0$. Odtud plynou vztahy $P(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. Podmínka exaktnosti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ plyne ze Schwarzovy věty o rovnosti smíšených derivací. Řešení takové exaktní diferenciální rovnice pak lze zapsat v implicitním tvaru jako $F(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Příklad: Řešte rovnici $(\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x + 3x^2)\mathrm{d}x = (2 - x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$.

Řešení. Rovnici nejprve upravíme na tvar exaktní rovnice:

$$(\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x + 3x^2)\mathrm{d}x + (-2 + x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y = 0.$$

Jednoduše lze ověřit, že podmínka exaktnosti je splněna, protože $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$.

Nyní využijeme vztah $Q(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$:

$$F(x, y) = \int(-2 + x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y + C(x),$$

$$F(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2y + C(x).$$

Nyní jsme získali tvar kmenové funkce, který má ovšem ten nedostatek, že „konstantou“ $C(x)$ může být jakákoliv funkce proměnné x. Pro další výpočet využijeme vztah $P(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ a dosadíme tvar kmenové funkce, který jsme získali výše:

$$P(x, y) = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x + 3x^2 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x + C'(x).$$

Odtud $C'(x) = 3x^2$, tedy $C(x) = \int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Dosazením za $C(x)$ do kmenové funkce získáme $F(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2y + x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Řešení původní diferenciální rovnice je tedy $x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x - 2y + x^3 = C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

2.6 Clairautova rovnice

Clairautova rovnice je rovnice typu $y = y'x + g(y')$. Tuto rovnici řešíme zavedením substituce $p = y'$ a derivováním celé rovnice podle x. Úpravy jsou následující:

$$y = xp + g(p),$$

$$y' = p = p + xp' + g'(p)p',$$

$$0 = xp' + g'(p)p',$$

$$0 = p'(x + g'(p)).$$

Tato rovnice má dvě možná řešení. Buď $p' = 0$ nebo $x + g'(p) = 0$ (součin dvou činitelů je roven nule když kterýkoliv z těchto činitelů je nulový).

Z první možnosti $p' = 0$ získáme $p = c$, $c \in \mathbb{R}$, což po dosazení do zadání rovnice dává $y = cx + g(c)$, kdy c je libovolná konstanta z definičního oboru funkce g. Tato řešení jsou obecným řešením rovnice (z geometrického hlediska jde o přímky).

Singulární řešení rovnice získáme z možnosti $x + g'(p) = 0$, odkud vyjádříme p jako funkci x a dosadíme do zadání rovnice, čímž získáme vyjádření y. Pokud z rovnosti $x + g'(p) = 0$ nelze vyjádřit p, vyjádříme singulární řešení parametricky: $x = -g'(p)$, $y = -pg'(p) + g(p)$. Hodnota parametru p může být v takovém případě jakákoliv hodnota z definičního oboru funkce g.

Pro Clairautovu rovnici je charakteristický zajímavý vztah mezi singulárním a obecným řešením. Každá přímka obecného řešení je tečnou ke křivce singulárního řešení.

Příklad: Řešte rovnici $y = xy' + y' + \mathrm{e}^{y'}$.

Řešení. Zavedeme substituci $p = y'$ a rovnici zderivujeme a upravíme:

$$y = xp + p + \mathrm{e}^p, \tag{2.2}$$

$$y' = p = p + xp' + p' + \mathrm{e}^p p',$$

$$0 = xp' + p' + \mathrm{e}^p p' = p'(x + 1 + \mathrm{e}^p).$$

Uvažujme nejprve první možnost $p' = 0$, odkud $p = c$, $c \in \mathbb{R}$, což po dosazení do (2.2) dává obecné řešení $y = xc + c + \mathrm{e}^c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ze druhé možnosti získáme singulární řešení. Z rovnice $x + 1 + \mathrm{e}^p = 0$ lze vyjádřit $\mathrm{e}^p = -1 - x$, odkud logaritmováním získáme $p = \ln(-1 - x)$. Po dosazení do (2.2) pak získáme singulární řešení $y = x \cdot \ln(-1 - x) + \ln(-1 - x) - 1 - x$. ■

2.7 Izogonální a ortogonální trajektorie

Nechť je dána soustava křivek v rovině $F(x, y, C) = 0$ závislá na jednom parametru C. Protíná-li ji nějaká jiná rovinná křivka podle určitého zákona, nazývá se taková křivka trajektorií soustavy $F(x, y, C) = 0$. Speciálním případem trajektorií soustav jsou izogonální a orgtogonální trajektorie. Protíná-li nějaká rovinná křivka všechny křivky soustavy $F(x, y, C) = 0$ pod týmž úhlem φ $(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$ bez ohledu na hodnotu parametru C, nazývá se taková křivka izogonální trajektorií soustavy (křivky se protínají pod úhlem φ pokud v místě jejich průsečíku svírají jejich tečny úhel φ). Pokud $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nazývá se taková křivka ortogonální trajektorií soustavy.

Postup pro nalezení izogonálních a ortogonálních trajektorií je následující:

Ze systému křivek $F(x,\, y,\, C) = 0$ vyjádříme parametr C. Získáme vyjádření $C = G(x,\, y)$, což je ekvivalentní se zápisem $G(x,\, y) - C = 0$ (obě vyjádření jsou zároveň ekvivalentní s vyjádřením $F(x,\, y,\, C) = 0$ systému křivek ze zadání). Podle věty o derivaci implicitně zadané funkci aplikované na vyjádření C získáme:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y' = 0. \tag{2.3}$$

Vztah (2.3) je diferenciální rovnice, jejímž řešením je soustava rovinných křivek $C = G(x,\, y)$ daná zadáním.

Nyní uvážíme vztah mezi směrnicemi křivek v zadání a jejich izogonálními trajektoriemi. Uvažujme $(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$. Nechť y' je derivace soustavy rovinných křivek $F(x,\, y,\, C) = 0$ a $y'_\star$ nechť označuje derivaci izogonálních trajektorií. Jelikož derivace je směrnicí tečny, platí $y' = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, pod kterým protíná příslušná tečna vedená bodem $[x_0,\, y_0]$ osu x. Budeme-li úhel φ odečítat v záporném smyslu, tečny izogonálních trajektorií protnou osu x pod úhlem $\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$. Budeme-li úhel φ přičítat v kladném smyslu, tečny izogonálních trajektorií budou osu x protínat pod úhlem $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$. Využijeme-li vzorec z goniometrie $\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v}$, můžeme psát:

$$y'_\star = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{y' \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp y' \operatorname{tg} \varphi}. \tag{2.4}$$

Pomocí vzorce (2.4) můžeme najít ke každé tečně systému křivek $C = G(x,\, y)$ směrnici tečny izogonální trajektorie. Nahradíme-li v diferenciální rovnici určující systém křivek $C = G(x,\, y)$ derivaci y' výrazem $\frac{y' \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp y' \operatorname{tg} \varphi}$, získáme diferenciální rovnici

$$\tfrac{\partial G}{\partial x} + \tfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \tfrac{y' \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp y' \operatorname{tg} \varphi} = 0,$$

kterou dále upravujeme:

$$\tfrac{\partial G}{\partial x} (1 \mp y' \operatorname{tg} \varphi) + \tfrac{\partial G}{\partial y} (y' \pm \operatorname{tg} \varphi) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} \pm \frac{\partial G}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi \right) y' = \pm \frac{\partial G}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial G}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Vztah (2.5) je diferenciální rovnice, jejímž řešením jsou izogonální trajektorie systému křivek $C = G(x,\, y)$. Bereme-li z této rovnice pouze horní znaménka, získáme systém izogonálních trajektorií vzniklý odečítáním úhlu φ v záporném smyslu. Bereme-li pouze spodní znaménka, získáme systém izogonálních trajektorií vzniklý přičítáním úhlu φ v kladném smyslu.

V případě systému ortogonálních trajektorií nezáleží na tom, zda přičítáme úhel φ v kladném nebo záporném smyslu, oba takové systémy splývají do jednoho. Pro určení ortogonálních trajektorií ale nelze použít rovnici (2.5), protože $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ není definován (a pro odvození tudíž nelze použít vzorec pro výpočet $\operatorname{tg}(u \pm v)$). Pro odvození diferenciální rovnice, jejímž řešením jsou ortogonální trajektorie, využijeme skutečnost, že dvě přímky jsou kolmé právě tehdy, když součin jejich směrnic je roven -1, z čehož při našem označení plyne $y'_\star = -\frac{1}{y'}$. V diferenciální rovnici (2.3), jejímž řešením je soustava křivek $C = G(x, y)$ daná zadáním, nahradíme výraz y' výrazem $-\frac{1}{y'}$, čímž získáme rovnici

$$\tfrac{\partial G}{\partial x} - \tfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \tfrac{1}{y'} = 0,$$

ze které úpravou získáme rovnici

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} y' = 0. \tag{2.6}$$

Řešením rovnice (2.6) je soustava ortogonálních trajektorií systému křivek $C = G(x, y)$ daného zadáním.

Kapitola 3

Geometrické úlohy

3.1 Řešené příklady

Příklad 1

Určete křivku, která prochází bodem [1, 2] a jejíž libovolná tečna má směrnici $\ln x_0$, kde x_0 je x-ová souřadnice bodu dotyku tečny a křivky.

Řešení. Při řešení tohoto příkladu využijeme geometrického významu derivace. Derivace křivky $y = f(x)$ v jejím bodě x_0 udává směrnici tečny, která je vedená bodem x_0. Požadavek zadání lze tedy zapsat ve formě jednoduché diferenciální rovnice $y'(x) = \ln x$ s počáteční podmínkou $y(1)$=2.

Řešení takovéto rovnice je vlastně nalezením příslušné primitivní funkce. S použitím metody per partes je obecné řešení rovnice následující:

$$y = \int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x \tfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Pro nalezení partikulárního řešení použijeme počáteční podmínku, tedy $y(1)$=2, odkud $2 = \ln 1 - 1 + c$ a tedy $c = 3$.

Rovnice námi hledané křivky je tedy $y = x \ln x - x + 3$. ■

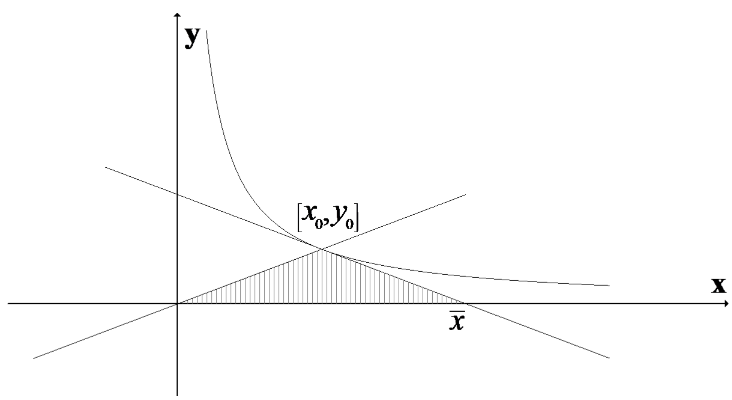
Příklad 2

Ověřte, zda křivky $y_1 = \frac{4}{x^2}$ a $y_2 = \frac{8}{x}$ mají následující vlastnost:
Obsah trojúhelníka určeného libovolnou tečnou ke křivce, osou x a přímkou spojující počátek souřadné soustavy s bodem dotyku tečny je neměnný a roven konstantě P.
Pokud je tato vlastnost splněna, určete hodnotu konstanty P.

Řešení. Tečna křivky $y = f(x)$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Označíme-li $\bar{x}$ vzdálenost průsečíku křivky s osou x od počátku souřadné soustavy a dosadíme do rovnice tečny bod $[\bar{x}, 0]$ (průsečík tečny s osou x), získáme rovnici, kterou musí křivka s požadovanou vlastností splňovat:

$$-y_0 = y'(x_0) \cdot (\bar{x} - x_0). \tag{3.1}$$

Geometricky je situace nastíněná zadáním znázorněna na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1

Obsah trojúhelníka určeného osou x, tečnou a přímkou spojující počátek soustavy s bodem $[x_0, y_0]$ lze spočítat $S = \frac{1}{2}\bar{x}y_0$.

Pro další postup je potřeba uvědomit si, že množina bodů $[x_0, y_0]$ tvoří křivky s požadovanou vlastností. Pro ověření, zda je vlastnost zadání splněna, dosadíme vztahy $y_0 = \frac{4}{x_0^2}$ a $y_0 = \frac{8}{x_0}$ (dané předpisy zkoumaných křivek) do rovnic pro výpočet obsahu trojúhelníka a upravené rovnice tečny (3.1) a ověříme, zda je získaná rovnice splněna pro všechny body $[x_0, y_0]$ jednotlivých křivek.

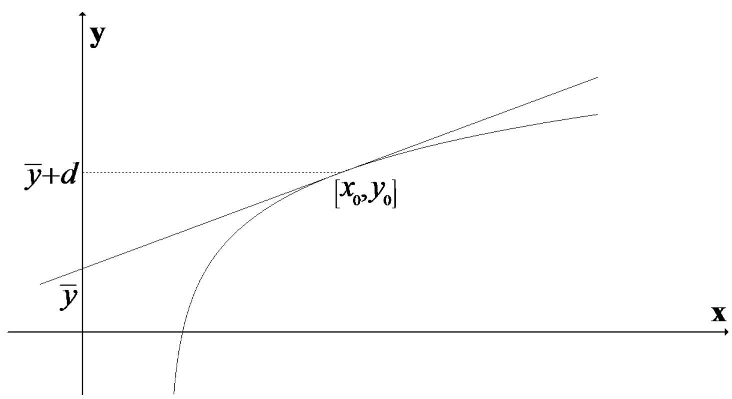
Nejdříve ověříme, zda je vlastnost splněna pro křivku y_1. Po dosazení rovnice křivky a její derivace do upravené rovnice tečny získáme vztah $-\frac{4}{x_0^2} = -\frac{8}{x_0^3}(\bar{x} - x_0)$, ze kterého vyjádříme $\bar{x} = \frac{3}{2}x_0$. Toto vyjádření dosadíme do vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníka a ověříme dosazením rovnice křivky, zda je tento obsah konstantní. Z vyjádření $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x_0 \cdot \frac{4}{x_0^2} = \frac{3}{x_0}$ je patrné, že obsah trojúhelníka není konstantní. Obsah je závislý na souřadnicích bodu, kterým je tečna vedena, křivka y_1 tedy vlastnost požadovanou zadáním nesplňuje.

Ověření pro křivku y_2 je podobné. Po dosazení rovnice křivky a její derivace do upravené rovnice tečny získáme $-\frac{8}{x_0} = -\frac{8}{x_0^2}(\bar{x} - x_0)$, odkud $\bar{x} = 2x_0$. Po dosazení do vztahu pro výpočet obsahu získáme $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_0 \cdot \frac{8}{x_0} = 8$, obsah je tedy konstantní (nezávisí na bodu dotyku tečny). Podmínku zadání tedy křivka y_2 splňuje a obsah je číselně roven 8 (což je hodnota konstanty P). ■

Příklad 3

Určete rovnice všech křivek v rovině, jejichž libovolná tečna protíná osu y v bodě, jehož y-ová souřadnice je o kladnou konstantu d menší, než y-ová souřadnice bodu dotyku tečny.

Řešení. Při řešení úlohy vyjdeme z náčrtku na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2

Dle požadavku zadání má platit $y_0 = \bar{y} + d$, odkud $\bar{y} = y_0 - d$. Do tohoto vyjádření dosadíme $\bar{y}$ ze vzorce (1.5), čímž získáme rovnici $y_0 - x_0 \cdot y'(x_0) = y_0 - d$, odkud další úpravou získáme $-d = y'(x_0)(-x_0)$.

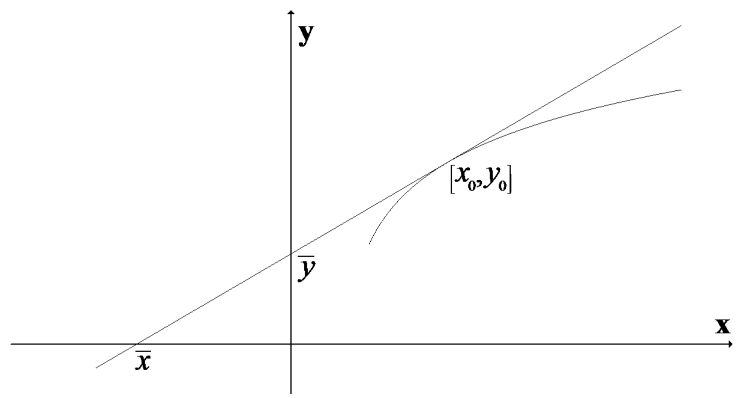
Jelikož hledané křivky jsou tvořené body $[x_0, y_0]$ (ze kterých je možné vést tečnu s požadovanými vlastnostmi), lze říct, že hledané křivky jsou řešeními diferenciální rovnice $d = y'x$. Tato rovnice je typu $y' = f(x)$, řešení rovnice získáme nalezením příslušných primitivních funkcí, tedy $y = \int \frac{d}{x}\,\mathrm{d}x = d \cdot \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Jelikož cílem zadání je nalézt všechny křivky s požadovanou vlastností, je důležité ponechat ve tvaru řešení argument přirozeného logaritmu x v absolutní hodnotě. Z tvaru funkcí $y = \ln x$ a $y = \ln(-x)$ je tato skutečnost dobře patrná ($y = \ln(-x)$ je také křivka s požadovanou vlastností). ■

Příklad 4

Určete rovnice všech křivek v rovině, které mají následující vlastnost:
Odvěsny trojúhelníka tvořeného tečnou ke křivce v libovolném jejím bodě a souřadnými osami mají délky v poměru $1 : x_0$, kde x_0 je x-ová souřadnice bodu dotyku tečny a křivky.

Řešení. Situaci v zadání si graficky znázorníme (obrázek 3.3).



Obrázek 3.3

Z obrázku je patrné, že hledáme křivky, pro jejichž tečny vedené bodem $[x_0, y_0]$ platí $\pm\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{1}{x_0}$ nebo $\pm\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{1}{x_0}$ ($\pm$ je nutné kvůli tomu, že průsečíky s osami mohou mít v analytickém vyjádření i záporné hodnoty souřadnic, ale pro délku úseku bereme v úvahu jejich absolutní hodnoty). Množina vyhovujících bodů $[x_0, y_0]$ tvoří námi hledané křivky. Po dosazení $\bar{x}$ a $\bar{y}$ dle vzorců (1.4) a (1.5) do analyticky vyjádřených požadavků zadání získáváme následující rovnice:

$$\frac{\frac{y'(x_0)\cdot x_0 - y_0}{y'(x_0)}}{y_0 - y'(x_0)\cdot x_0} = \pm\frac{1}{x_0},$$

což dává po úpravě rovnici $\frac{1}{y'(x_0)} = \pm\frac{1}{x_0}$, tedy řešíme rovnici $y' = \pm x$, a dále

$$\frac{y_0 - y'(x_0)\cdot x_0}{\frac{y'(x_0)\cdot x_0 - y_0}{y'(x_0)}} = \pm\frac{1}{x_0},$$

což dává po úpravě rovnici $y'(x_0) = \pm\frac{1}{x_0}$, tedy řešíme rovnici $y' = \pm\frac{1}{x}$.

Obě rovnice jsou rovnice typu $y'(x) = f(x)$, jejich řešení získáme jednoduchým nalezením příslušných primitivních funkcí. Integrály jsou v obou případech elementární, řešeními jsou křivky $y = \pm\frac{x^2}{2} + c$, $y = \pm\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. ■

Příklad 5

Najděte křivky v rovině, které mají následující vlastnost:
Pro libovolnou normálu platí, že bod křivky, kterým je normála vedena, je od průsečíku osy y a této normály dvakrát dál než od osy y (kolmá vzdálenost).
Které z těchto křivek procházejí bodem $\left[\sqrt{3}\,,\,-1\right]$?

Řešení. Nejprve vyjádříme analyticky požadavek zadání. Označíme a vzdálenost bodu, kterým je normála vedena a průsečíku normály s osou y. Dále $\bar{y}$ bude označovat y-ovou souřadnici průsečíku normály a osy y. Situace je zachycena na obrázku 3.4.

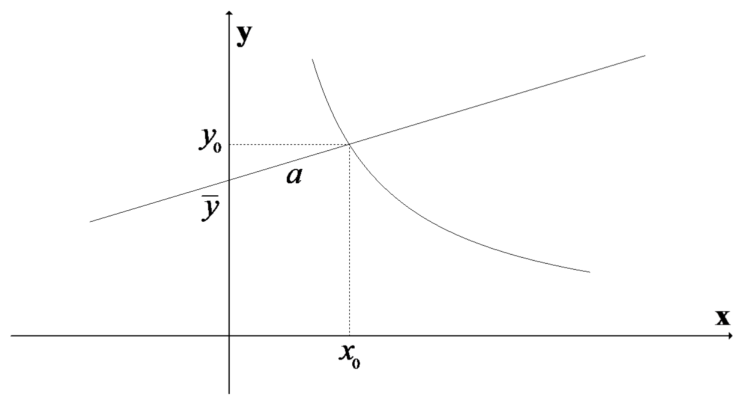
Požadavky na vzdálenosti kladené zadáním lze postupně s využitím Pythagorovy věty upravit takto:

$$a = 2x_0,$$

$$\sqrt{x_0^2 + (y_0 - \bar{y})^2} = 2x_0,$$

$$x_0^2 + (y_0 - \bar{y})^2 = 4x_0^2,$$

$$(y_0 - \bar{y})^2 = 3x_0^2. \qquad (3.2)$$



Obrázek 3.4

Podle vzorce (1.7) platí $\bar{y} = y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)}$, odkud vyjádříme $y_0 - \bar{y} = -\frac{x_0}{y'(x_0)}$, což dosadíme do rovnice (3.2) a postupně upravujeme:

$$\frac{x_0^2}{(y'(x_0))^2} = 3x_0^2,$$

$$(y'(x_0))^2 = \frac{x_0^2}{3x_0^2} = \frac{1}{3},$$

$$y'(x_0) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Jelikož body $[x_0, y_0]$ tvoří námi hledané křivky, jejich rovnice jsou řešení diferenciální rovnice $y' = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tato rovnice je typu $y'(x) = f(x)$, její řešení tedy získáme nalezením příslušné primitivní funkce: $y = \pm\int \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Z analytického vyjádření je vidět, že křivky s požadovanou vlastností jsou přímky se směrnicí $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Zbývá nalézt ta řešení, která procházejí bodem $\left[\sqrt{3}\,,\,-1\right]$. Tento požadavek splňují dvě přímky (pro každou možnost hodnoty směrnice jedna).

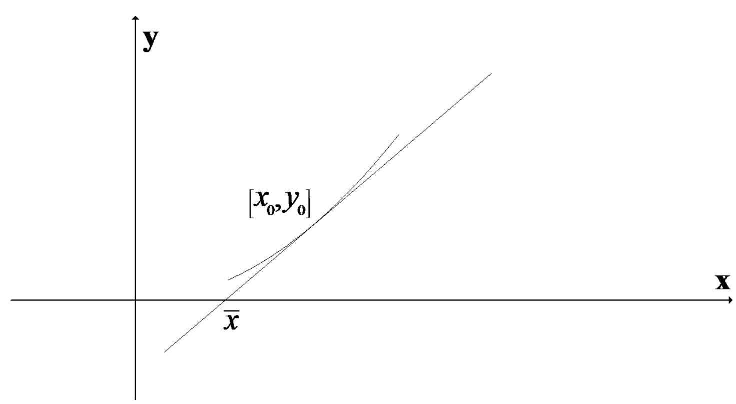
Pro směrnici $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hledáme q_1 tak, aby bod $\left[\sqrt{3}, -1\right]$ ležel na přímce $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + q_1$. Dosazením za x a y získáme $q_1 = -2$. První přímka má tedy rovnici $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2$.

Pro směrnici $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ hledáme q_2 tak, aby bod $\left[\sqrt{3}, -1\right]$ ležel na přímce $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + q_2$. Dosazením za x a y získáme $q_2 = 1$. Druhá hledaná přímka má rovnici $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$. ■

Příklad 6

Najděte křivky, pro které je vzdálenost průsečíku libovolné jejich tečny s osou x od počátku souřadné soustavy rovna polovině hodnoty x-ové souřadnice bodu, v němž je tečna sestrojena.

Řešení. Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5

Požadavek zadání lze analyticky vyjádřit jako $\bar{x} = \frac{1}{2}x_0$. Do tohoto vyjádření dosadíme $\bar{x}$ ze vzorce (1.4), čímž získáme rovnici

$$x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} = \frac{1}{2}x_0.$$

Jelikož množina bodů $[x_0, y_0]$ tvoří křivky s požadovanou vlastností, můžeme po úpravě značení říct, že hledáme řešení diferenciální rovnice

$$x - \frac{y}{y'} = \frac{1}{2}x.$$

Tuto rovnici dále upravujeme:

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{2}x,$$

$$y' = 2\frac{y}{x}.$$

Tato rovnice je ve tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$, lze ji tedy řešit jako homogenní rovnici. Jde ale zároveň o rovnici se separovanými proměnnými a rovněž tak jde o lineární diferenciální rovnici. Řešení pomocí separace proměnných:

$$
\begin{gathered}
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\tfrac{y}{x}, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad (3.3) \\
\ln|y| = 2\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}, \\
\ln|y| = \ln x^2 + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R}, \\
\ln|y| = \ln x^2 + \ln K,\ K \in (0,\, \infty), \\
\ln|y| = \ln(Kx^2),\ K \in (0,\, \infty), \\
|y| = Kx^2,\ K \in (0,\, \infty), \\
y = Kx^2,\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{gathered}
$$

Pro volbu $K = 0$ získáme funkci $y = 0$, u které dosazením do zadání rovnice snadno zjistíme, že je také řešením rovnice (ověření je nutno provést zvlášť, protože funkce $y = 0$ odporuje podmínkám, tudíž od (3.3) jsme v rámci řešení byli nuceni předpokládat $y \neq 0$). Obecné řešení této diferenciální rovnice je tedy soustava parabol $y = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$, což jsou zároveň námi hledané křivky.

Požadavku zadání příkladu jsme sice v tomto okamžiku splnili, nicméně je dobré si uvědomit, že soustava parabol, kterou jsme nalezli, neobsahuje všechny křivky s vlastností požadovanou zadáním. Pokud bychom obrázek 3.5 překreslili tak, že $\overline{x} = 0$ a vycházeli bychom z takového obrázku při hledání diferenciální rovnice, dosadili bychom za vzdálenost průsečíku tečny s osou x od počátku $[0,\, 0]$ výraz $-\bar{x}$ (protože vzdálenost musí být vždy kladná) a při následných úpravách bychom dospěli k rovnici $y = \frac{3}{2}xy'$. Tuto rovnici lze také řešit metodou separace proměnných a řešením je soustava křivek $y = Kx^{\frac{2}{3}}$, $K \in \mathbb{R}$. Ověřit tuto skutečnost lze stejným postupem, jakým jsme nalezli soustavu parabol, podrobné ověření přenechávám čtenáři jako cvičení. ■

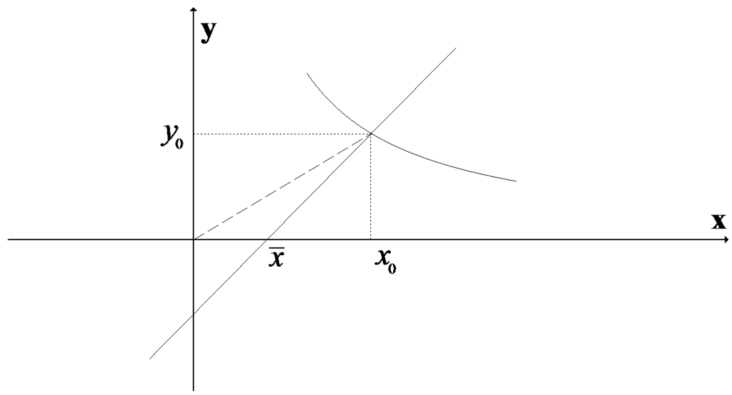
Příklad 7

Najděte křivky v rovině, které mají následující vlastnost:
Pro libovolnou normálu platí, že bod křivky, kterým je normála vedena, je od průsečíku normály s osou x stejně vzdálen jako od počátku soustavy souřadnic.

Řešení. Nejdříve využijeme obrázek 3.6. pro formulování vlastnosti zadání analyticky. Vyjádříme-li s využitím Pythagorovy věty vzdálenosti ze zadání příkladu pomocí x_0, y_0 a položíme je rovny, získáme

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - \bar{x})^2 + y_0^2}.$$

Do této rovnice dosadíme $\bar{x}$ dle vzorce (1.6) a dále upravujeme:



Obrázek 3.6

$$x_0^2 + y_0^2 = (x_0 - x_0 - y_0 \cdot y'(x_0))^2 + y_0^2,$$

$$x_0^2 = (-y_0 \cdot y'(x_0))^2,$$

$$x_0^2 = y_0^2 \cdot (y'(x_0))^2,$$

$$(y'(x_0))^2 = \tfrac{x_0^2}{y_0^2}.$$

Jelikož křivky které hledáme jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, lze říct, že hledané křivky jsou řešeními diferenciální rovnice $(y')^2 = \frac{x^2}{y^2}$, kterou lze po drobné úpravě řešit jako diferenciální rovnici se separovanými proměnnými nebo jako homogenní rovnici. Jelikož metoda separace proměnných je v tomto případě jednodušší, využijeme ji k řešení a úpravám:

$$y' = \pm\tfrac{x}{y},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\tfrac{x}{y},$$

$$\textstyle\int y \,\mathrm{d}y = \pm \int x \,\mathrm{d}x,$$

$$\tfrac{y^2}{2} + c = \pm\tfrac{x^2}{2},\ c \in \mathbb{R},$$

$$y^2 \pm x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Námi hledané křivky jsou tedy hyperboly $y^2 - x^2 = C, C \in \mathbb{R}$ a také kružnice se středem [0, 0]: $x^2 + y^2 = K, K > 0$ (pro záporná K není výsledek rovnicí žádné křivky a pro $K = 0$ je výsledkem samotný bod [0, 0], který nemá smysl v rámci zadání uvažovat).

■

Příklad 8

Určete rovnice křivek, jejichž každá normála protínající osu x v její kladné části ($x > 0$) ji protíná v bodě, jehož x-ová souřadnice je o 1 větší, než x-ová souřadnice bodu křivky, kterým je normála vedena.

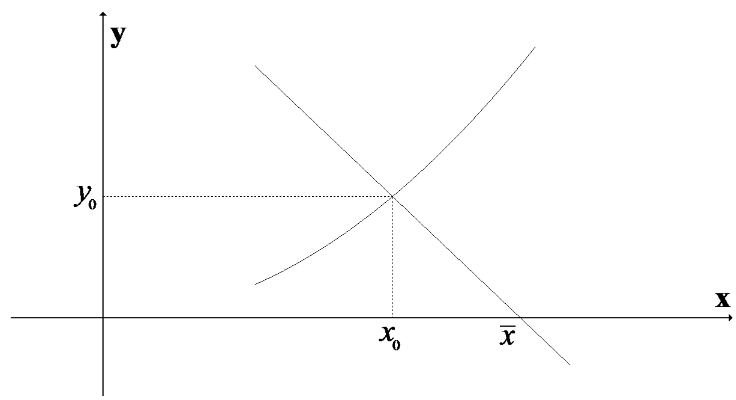
Řešení. Situaci v zadání znázorňuje obrázek 3.7. Požadavek zadání lze analyticky vyjádřit tak, že hledáme křivky splňující

$$\bar{x} = x_0 + 1.$$

Do tohoto vyjádření dosadíme $\bar{x}$ dle vzorce (1.6) a dále upravujeme:

$$y_0 \cdot y'(x_0) + x_0 = x_0 + 1,$$

$$y_0 \cdot y'(x_0) = 1.$$



Obrázek 3.7

Jelikož body $[x_0, y_0]$ tvoří hledané křivky, lze hledání křivky formulovat jako úlohu hledání řešení rovnice $yy' = 1$, kterou řešíme metodou separace proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} y = 1,$$

$$\int y \,\mathrm{d}y = \int 1 \,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{y^2}{2} = x + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y^2 = 2x + C,\ C \in \mathbb{R},$$

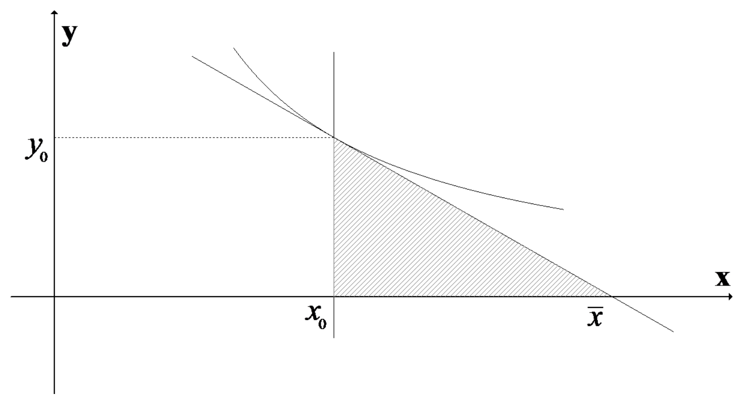
což jsou rovnice námi hledaných křivek (z geometrického hlediska jde o soustavu parabol).

■

Příklad 9

Najděte křivky v rovině, pro které je obsah trojúhelníka určeného libovolnou tečnou ke křivce, osou x a kolmicí k ose x vedenou bodem dotyku tečny a křivky konstantní a roven a^2.

Řešení. Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.8. Je vidět, že jelikož je trojúhelník pravoúhlý, bude nejjednodušší vyjádřit jeho obsah jako $S = \frac{1}{2}(\bar{x} - x_0)\, y_0$ a tedy požadavek zadání lze přepsat ve formě rovnice $(\bar{x} - x_0)\, y_0 = 2a^2$.



Obrázek 3.8

Nyní využijeme vzorec (1.4), ze kterého vyjádříme $\bar{x}$ a dosadíme do rovnice vyjadřující požadavek zadání:

$$-\frac{y_0}{y'(x_0)} \cdot y_0 = 2a^2. \tag{3.4}$$

Pokud chceme nalézt všechny křivky, které mají požadovanou vlastnost, je potřeba ještě drobná úprava. Tečna křivky totiž může protnout osu x i v bodě se zápornou x-ovou souřadnicí, v důsledku čehož může nastat i situace, kdy délka odvěsny ležící na ose x bude $x_0 - \bar{x}$. Tuto možnost zohledníme tak, že do vyjádření (3.4) přidáme $\pm$. Jelikož námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, lze hledané křivky získat řešením diferenciální rovnice, která vznikne z úpravy vyjádření (3.4) vynecháním nulových indexů. Křivky s požadovanou vlastností jsou tedy řešeními rovnice $\pm\frac{y}{y'}y = 2a^2$, kterou pomocí separace proměnných řešíme takto:

$$y' = \pm\tfrac{y^2}{2a^2},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\tfrac{y^2}{2a^2},$$

$$\pm 2a^2 \int \tfrac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 1 \, \mathrm{d}x,$$

$$\pm\tfrac{2a^2}{y} = x + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = \tfrac{2a^2}{c \pm x},\ c \in \mathbb{R}.$$

Námi hledané křivky jsou tedy hyperboly $y = \frac{2a^2}{c \pm x}$, $c \in \mathbb{R}$. Z náčrtků takových hyperbol je vidět, že vlastnost požadovaná zadáním platí pro všechny body na hyperbolách. Jedna celá větev hyperboly vždy protíná osu x v souladu se situací, ze které jsme vycházeli při tvorbě rovnice (3.6) a díky tomu, že tyto hyperboly jsou středově souměrné podle bodu na jejich asymptotě bez směrnice, bude souměrná i druhá větev. Jelikož tyto hyperboly nemají žádný vlastní bod, ve kterém by byla jejich tečna rovnoběžná s osou x (nemají žádný bod ve kterém by byla jejich derivace nulová), platí vlastnost požadovaná zadáním pro libovolný bod na hyperbolách. ■

Příklad 10

Určete rovnice křivek (v rovině), jejichž libovolná tečna protínající parabolu $y = x^2$ ji protíná v bodě, jehož x-ová souřadnice je o 1 větší než x-ová souřadnice bodu dotyku tečny.

Řešení. Tečna obecné křivky $y = f(x)$ v jejím bodě $[x_0, y_0]$ má analytickou rovnici $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Průsečík tečny s parabolou $y = x^2$ splňuje tuto rovnici také, přičemž dosazením průsečíku do rovnice tečny získáme vztah

$$x^2 - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \tag{3.5}$$

který je určující pro průsečík $[x, y]$ tečny a paraboly $y = x^2$.

Zadání určuje vztah mezi bodem dotyku tečny a průsečíkem tečny a paraboly vztahem $x = x_0 + 1$, který dosadíme do vztahu (3.5). Tímto dosazením získáme rovnici $(x_0 + 1)^2 - y_0 = y'(x_0)(x_0 + 1 - x_0)$, kterou upravíme jako $(x_0 + 1)^2 - y_0 = y'(x_0)$. Křivky které hledáme jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$ a tudíž s využitím předchozí rovnice můžeme říct, že hledané křivky jsou řešením rovnice $(x + 1)^2 - y = y'$. Tato rovnice je lineární diferenciální rovnice a lze ji řešit metodou integračního faktoru.

Po úpravě rovnice na obvyklý tvar $y' + y = (x + 1)^2$ je vidět, že integrační faktor je roven $\mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$. Po vynásobení obou stran diferenciální rovnice integračním faktorem upravujeme rovnici takto:

$$y'\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^x = (x + 1)^2\mathrm{e}^x,$$

$$(y\mathrm{e}^x)' = (x + 1)^2\mathrm{e}^x.$$

V této fázi zintegrujeme obě strany rovnice. Levá strana se změní pouze odstraněním znaménka derivace, pravou stranu zintegrujeme dvojím použitím metody per partes:

$$\int (x+1)^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x+1)^2\mathrm{e}^x - 2\int (x+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x+1)^2\mathrm{e}^x - 2\left[(x+1)\mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= (x+1)^2\mathrm{e}^x - 2(x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Rovnici po zintegrování obou stran dále upravujeme:

$$y\mathrm{e}^x = (x+1)^2\mathrm{e}^x - 2(x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2 + \tfrac{c}{\mathrm{e}^x},\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 2 + \tfrac{c}{\mathrm{e}^x},\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = x^2 + 1 + \tfrac{c}{\mathrm{e}^x},\ c \in \mathbb{R},$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek. ■

Příklad 11

Určete rovnice křivek, jejichž libovolná normála protínající parabolu $y^2 = -x$ ji protíná v bodě, jehož y-ová souřadnice je rovna polovině podílu y-ové a x-ové souřadnice bodu, kterým je normála vedena.

Řešení. Normála obecné křivky $y = f(x)$ v jejím bodě $[x_0,\, y_0]$ má analytickou rovnici $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$. Průsečík tečny s parabolou $y^2 = -x$ splňuje rovnici také, dosazením do rovnice normály za x získáme vztah

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(-y^2 - x_0), \tag{3.6}$$

který je určující pro průsečík $[x,\, y]$ normály a paraboly $y^2 = -x$.

Ze zadání plyne analytický vztah mezi bodem dotyku normály a paraboly a bodem, kterým je normála vedena, $y = \frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$. Dosazením do vztahu (3.6) získáme rovnici, kterou dále upravíme:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{y_0}{x_0} - y_0 = -\tfrac{1}{y'(x_0)}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{y_0^2}{x_0^2} - x_0\right),$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{y_0}{x_0} - y_0 = \tfrac{1}{y'(x_0)}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{y_0^2}{x_0^2} + x_0\right).$$

Jelikož křivky s vlastností požadovanou zadáním jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, nalezneme požadované křivky řešením diferenciální rovnice $\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - y = \frac{1}{y'} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} + x \right)$. Tuto rovnici budeme po rozepsání $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ řešit jako exaktní rovnici:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} + x \right),$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} + x \right) \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} - y \right) \mathrm{d}y = 0,$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} + x \right) \mathrm{d}x + \left(y - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \right) \mathrm{d}y = 0.$$

Nyní provedeme kontrolu exaktnosti. U rovnice tvaru $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ je podmínka exaktnosti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. V našem případě je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2}{4} \cdot \frac{y}{x^2} + 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 - \frac{1}{2} \cdot y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x^2}$, tedy podmínka exaktnosti je skutečně splněna.

Nyní budeme hledat kmenovou funkci $F(x, y)$. Integrováním hledáme tvar kmenové funkce:

$$F(x, y) = \int \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} + x \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C(y) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{2} + C(y). \quad (3.7)$$

Jelikož „konstanta“ C je závislá na proměnné y, kmenovou funkci je potřeba ještě „upřesnit“. Základní vlastnosti kmenové funkce jsou následující: $P = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. Využijeme druhé jmenované vlastnosti dosazením vztahu (3.7):

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} + C'(y) = Q,$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} + C'(y) = y - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}.$$

Z poslední rovnosti je vidět, že $C'(y) = y$, tedy $C(y) = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice (3.7) získáme analytické vyjádření kmenové funkce:

$$F(x, y) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

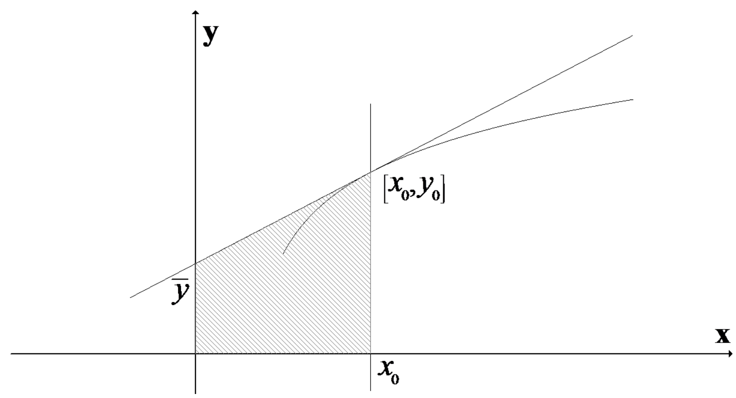
Odtud už je vidět, že hledané křivky mají rovnice $\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

Příklad 12

Najděte křivky v rovině, pro něž plocha lichoběžníka, tvořeného tečnou v libovolném bodě $[x_0,\, y_0]$ této křivky, osou x, osou y a přímkou $x = x_0$, je rovna jedné polovině kvadrátu x-ové souřadnice bodu, v němž byla tečna sestrojena.

Řešení. Situace popisovaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.9. Obsah lichoběžníka obecně počítáme jako $S = \frac{(z_1+z_2)v}{2}$, kde z_1, z_2 jsou základny lichoběžníka a v je jeho výška. Z obrázku je patrné, že obsah lichoběžníka lze vypočítat jako

$$S = \frac{(y_0 + \bar{y})x_0}{2}.$$



Obrázek 3.9

Do tohoto vyjádření dosadíme $\bar{y}$ ze vzorce (1.5) a zkombinujeme s požadavkem zadání $S = \frac{1}{2}x_0^2$:

$$\tfrac{1}{2} \cdot [y_0 + y_0 - x_0 \cdot y'(x_0)] \cdot x_0 = \tfrac{1}{2}x_0^2,$$

$$2y_0 - x_0 \cdot y'(x_0) = x_0.$$

Jelikož námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0,\, y_0]$, nalezneme jejich rovnice řešením diferenciální rovnice $2y - xy' = x$, což je lineární diferenciální rovnice. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru. Po úpravě rovnice na obvyklý tvar $y' - 2\frac{y}{x} = -1$ je vidět, že integrační faktor nalezneme následujícím způsobem:

$$\mathrm{e}^{-2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\cdot\ln x} = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{-2} = x^{-2} = \tfrac{1}{x^2}.$$

Obě strany rovnice vynásobíme integračním faktorem $\frac{1}{x^2}$ a rovnici dále upravujeme:

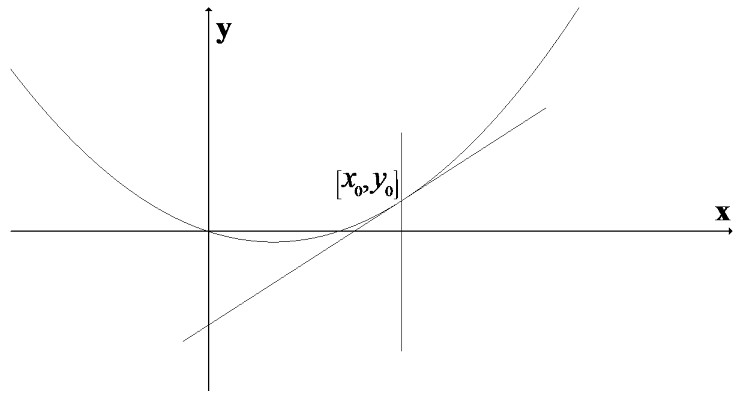
$$y' \cdot \tfrac{1}{x^2} - 2\tfrac{y}{x^3} = -\tfrac{1}{x^2},$$

$$\left(y \cdot \tfrac{1}{x^2}\right)' = -\tfrac{1}{x^2},$$

$$y \cdot \tfrac{1}{x^2} = -\int \tfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y = x + cx^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

U námi nalezeného řešení je již pouze jeden drobný problém, který je dobře patrný, pokud si načrtneme příklad některého parabolou tvořeného řešení. Ne každá tečna takové paraboly opravdu vytváří lichoběžník popsaný v zadání. V případě parabol ($c \neq 0$) tento lichoběžník vznikne pouze pokud hodnota x_0 je mezi řešeními rovnice $y = 0$. U řešení tvořeného přímkou $y = x$ zase lichoběžník (přesněji trojúhelník, protože horní základna lichoběžníka má nulovou délku) nevznikne, pokud je tečna vedena bodem [0, 0]. Zadání ale požaduje, aby byla vlastnost splněna v libovolném bodě křivky, a proto je nutné některé části z řešení rovnice odstranit. Budeme se na tyto křivky dívat jako na funkci proměnné x, omezíme jejich definiční obor a jednotlivé případy vhodně rozdělíme (podle hodnot konstanty c).



Obrázek 3.10

Křivky s vlastností požadovanou zadáním jsou potom následující:

1. polopřímka $y = x$, $x < 0$,
2. polopřímka $y = x$, $x > 0$,
3. grafy funkcí $y = x^2 + cx$, $c > 0$, $-c < x < 0$,
4. grafy funkcí $y = x^2 + cx$, $c < 0$, $0 < x < -c$. ■

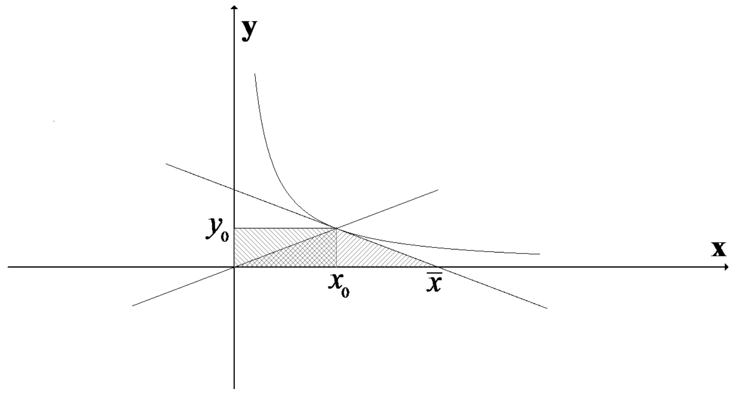
Příklad 13

Najděte křivky v rovině, pro které je obsah trojúhelníka určeného osou x, tečnou ke křivce vedenou libovolným jejím bodem $[x_0, y_0]$ (bod dotyku) a přímkou spojující počátek souřadné soustavy s bodem $[x_0, y_0]$ roven obsahu obdélníka, jehož dvě strany leží na osách souřadnic a bod $[x_0, y_0]$ je jeho vrcholem. (Pro jednoduchost uvažujte pouze tečny protínající osy souřadnic v jejich kladných částech.)

Řešení. Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.11 na následující straně. Nejdříve analyticky vyjádříme požadavek zadání. Z obrázku je snadno vidět, že obsah trojúhelníka spočítáme jako $S = \frac{1}{2}\bar{x}y_0$ a obsah obdélníka spočítáme jako $S = x_0 \cdot y_0$. Položíme-li oba výrazy rovny, získáme vztah

$$\frac{1}{2}\bar{x} = x_0.$$

Do tohoto vztahu dosadíme $\bar{x}$ ze vzorce (1.4). Jelikož uvažujeme pouze křivky v prvním kvadrantu, není potřeba přidávat absolutní hodnotu. Vzniklou rovnici dále upravujeme:



Obrázek 3.11

$$\frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}\right) = x_0,$$

$$x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} = 2x_0,$$

$$-\frac{y_0}{y'(x_0)} = x_0,$$

$$y'(x_0) = -\frac{y_0}{x_0}.$$

Námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0,\, y_0]$ díky čemuž lze říct, že tyto křivky jsou řešením diferenciální rovnice $y' = -\frac{y}{x}$. Tuto rovnici vyřešíme jako rovnici se separovanými proměnnými. Dostáváme:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x},$$

$$-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \quad (y \neq 0),$$

$$-\ln|x| = \ln|y| + c = \ln|y| + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$-\ln|x| = \ln(K\,|y|),\ K \in (0,\, \infty),$$

$$\frac{1}{|x|} = K\,|y|\,,\ K \in (0,\, \infty),$$

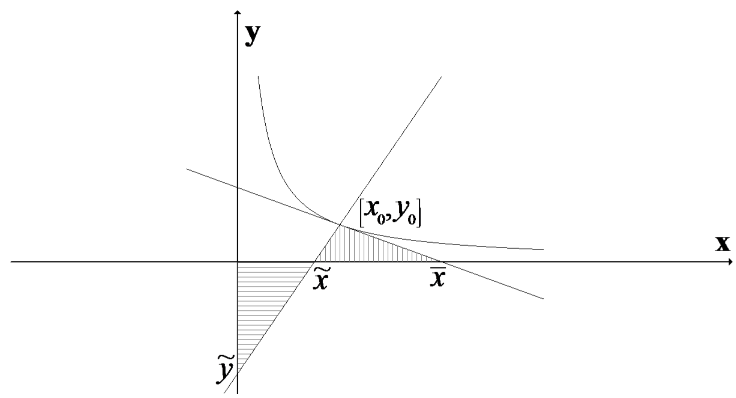
$$y = \frac{K}{x},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Volba konstanty $K = 0$ odpovídá funkci $y = 0$, která odporovala podmínkám, nicméně ani po dosazení této funkce do zadání diferenciální rovnice nejde o její řešení (problém s nulou ve jmenovateli nezmizí a ani z geometrického hlediska nemá křivka $y = 0$ vlastnost požadovanou zadáním). Námi nalezené křivky s požadovanou vlastností jsou tedy hyperboly s rovnicemi $y = \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

Příklad 14

Najděte křivky v rovině, pro které má každý trojúhelník utvořený normálou ke křivce a souřadnými osami stejný obsah, jako trojúhelník vytvořený osou x, tečnou a stejnou normálou. (Pro zjednodušení uvažujte pouze normály vedené body křivek v prvním kvadrantu.)

Řešení. Situace popisovaná zadáním je graficky znázorněna na obrázku 3.12. Nejdříve vyjádříme analyticky požadavek zadání. Z obrázku je vidět, že obsah trojúhelníka tvořeného normálou a souřadnými osami spočítáme jako $S = -\frac{1}{2} \cdot \widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$. Podobně obsah trojúhelníka tvořeného osou x, tečnou a normálou spočítáme jako $S = \frac{1}{2}\,(\overline{x} - \widetilde{x})\, y_0$. Položíme-li oba obsahy rovny, získáme rovnici



Obrázek 3.12

$$-\widetilde{x} \cdot \widetilde{y} = (\overline{x} - \widetilde{x}) \cdot y_0.$$

Využijeme vzorce (1.4), (1.6) a (1.7). Dosazením za $\overline{x}$, $\widetilde{x}$ a $\widetilde{y}$ do poslední rovnice dostaneme:

$$-\left[x_0 + y_0 \cdot y'(x_0)\right] \cdot \left[y_0 + \tfrac{x_0}{y'(x_0)}\right] = \left[x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)} - x_0 - y_0 \cdot y'(x_0)\right] \cdot y_0.$$

Jelikož námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0,\, y_0]$, lze z poslední rovnice odstranit „přebytečné“ indexy a hledané křivky nalézt jako řešení diferenciální rovnice:

$$-\left(x + yy'\right) \cdot \left(y + \tfrac{x}{y'}\right) = \left(x - \tfrac{y}{y'} - x - yy'\right) y.$$

Rovnici dále upravujeme:

$$(x + yy') \cdot \left(y + \tfrac{x}{y'}\right) = \left(\tfrac{y}{y'} + yy'\right) y,$$

$$y^2 y' + 2xy + \tfrac{x^2}{y'} = \tfrac{y^2}{y'} + y^2 y',$$

$$2xy + \tfrac{x^2}{y'} = \tfrac{y^2}{y'},$$

$$2xyy' = y^2 - x^2,$$

$$2\frac{y}{x}y' = \frac{y^2}{x^2} - 1.$$

Z tohoto tvaru je již vidět, že jde o homogenní rovnici, protože y' je možné vyjádřit jako funkci proměnné $\frac{y}{x}$. Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y = zx$ a $y' = z'x + z$. Po dosazení do rovnice získáme novou rovnici, kterou budeme dalšími úpravami převádět na rovnici se separovanými proměnnými:

$$2z(z'x + z) = z^2 - 1,$$

$$2zxz' = -z^2 - 1,$$

$$2zx\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -z^2 - 1,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{2z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

U integrálu na pravé straně rovnice využijeme toho, že v čitateli zlomku je derivace jmenovatele a pokračujeme v dalších úpravách:

$$\ln|x| = -\ln|z^2+1| - c = -\ln|z^2+1| - \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\ln|x| = -\ln\frac{|z^2+1|}{K},\ K > 0,$$

$$|x| = \frac{K}{|z^2+1|},\ K > 0,$$

$$x = \frac{K}{z^2+1},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po dosazení zpětném dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$ dále upravujeme:

$$x = \frac{K}{\frac{y^2}{x^2}+1},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$x = \frac{K}{\frac{y^2+x^2}{x^2}},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

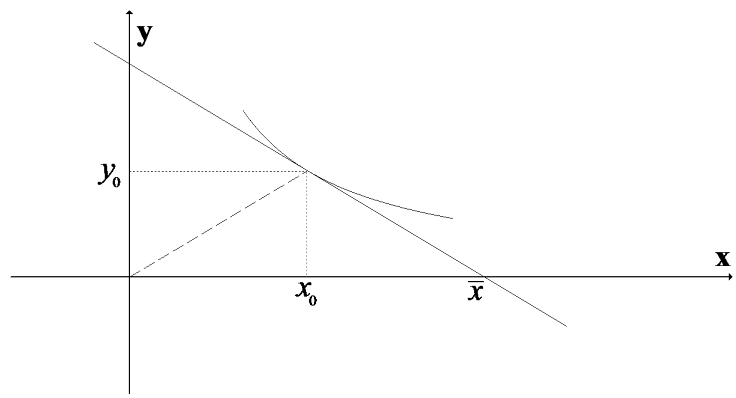
$$\frac{x^2+y^2}{x} = K,\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek. Ze tvaru $x^2 + y^2 = Kx$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vidět, že jde o množinu všech kružnic (s nenulovým poloměrem), které procházejí bodem $[0, 0]$ a jejichž středy leží na ose x. ■

Příklad 15

Najděte křivky v rovině, pro které je průsečík libovolné tečny s osou x stejně vzdálen od bodu dotyku i od počátku souřadné soustavy.

Řešení. Situace ze zadání je zachycena na obrázku 3.13. Označme vzdálenost bodu dotyku tečny od jejího průsečíku s osou x jako a. Z obrázku je vidět, že $a^2 = (\overline{x} - x_0)^2 + y_0^2$. Dále vzdálenost průsečíku tečny od počátku souřadné soustavy je rovna $\bar{x}$. Požadavek rovnosti těchto vzdáleností lze formulovat jako $|a| = |\bar{x}|$, což lze přepsat jako z početního hlediska praktičtější rovnost $a^2 = (\bar{x})^2$, což po dosazení za a vede k rovnici



Obrázek 3.13

$$(\overline{x} - x_0)^2 + y_0^2 = \bar{x}^2.$$

S využitím vzorce (1.4) a dosazením za $\bar{x}$ získáme rovnici:

$$(x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)} - x_0)^2 + y_0^2 = \left(x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2.$$

Díky tomu, že námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, lze z poslední rovnice odstranit „přebytečné“ indexy a hledané křivky nalézt jako řešení diferenciální rovnice, ze které postupnými úpravami dostáváme:

$$(x - \tfrac{y}{y'} - x)^2 + y^2 = \left(x - \tfrac{y}{y'}\right)^2,$$

$$(-\tfrac{y}{y'})^2 + y^2 = x^2 - 2x\tfrac{y}{y'} + \left(\tfrac{y}{y'}\right)^2,$$

$$y^2 = x^2 - 2x\tfrac{y}{y'},$$

$$2x\tfrac{y}{y'} = x^2 - y^2,$$

$$2\tfrac{y}{x} = \left(1 - \tfrac{y^2}{x^2}\right) y'.$$

Z tohoto vyjádření již je patrné, že jde o homogenní rovnici. Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y = zx$ a $y' = z'x + z$. Po dosazení do rovnice získáme novou rovnici, kterou budeme dalšími úpravami převádět na rovnici se separovanými proměnnými:

$$2z = (1 - z^2)\,(z'x + z),$$

$$2z = z'x + y - z'z^2x - z^3,$$

$$z^3 + z = z'x(1 - z^2),$$

$$\tfrac{z^3+z}{1-z^2} = \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x,$$

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int \tfrac{1-z^2}{z^3+z}\,\mathrm{d}z.$$

Integrál na pravé straně upravíme rozkladem na parciální zlomky a pokračujeme v integraci a úpravách:

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int (\tfrac{1}{z} - \tfrac{2z}{z^2+1})\,\mathrm{d}z \;\; (z \neq 0),$$

$$\ln|x| = \ln|z| - \ln|z^2+1| - c = \ln|z| - \ln|z^2+1| - \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\ln|x| = \ln(\tfrac{1}{K}\left|\tfrac{z}{z^2+1}\right|),\ K > 0,$$

$$|x| = \tfrac{1}{K}\left|\tfrac{z}{z^2+1}\right|,\ K > 0,$$

$$Kx = \tfrac{z}{z^2+1},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po zpětném dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$ pokračujeme v úpravách:

$$Kx = \tfrac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1} = \tfrac{xy}{x^2+y^2},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$y = K(x^2 + y^2),\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Podmínka $z \neq 0$ po zpětném dosazení substituce přejde v podmínku $\frac{y}{x} \neq 0$, neboli $y \neq 0$. Funkce $y = 0$ je ale také řešením rovnice (rovněž z geometrického hlediska křivka $y = 0$ splňuje požadovanou vlastnost - skutečnost, že v takovém případě má tečna nekonečně mnoho průsečíků s osou x, není překážkou). Funkce $y = 0$ odpovídá volbě konstanty $K = 0$. Námi hledané křivky tedy mají rovnice $y = K(x^2 + y^2)$, $K \in \mathbb{R}$. Z geometrického hlediska se pro volbu $K \neq 0$ jedná o množinu všech kružnic (s nenulovým poloměrem), které procházejí bodem $[0, 0]$ a jejichž střed zároveň leží na ose y. Pro volbu $K = 0$ jde o přímku $y = 0$. ■

Příklad 16

Najděte všechny křivky v rovině, pro které je obsah každého trojúhelníka určeného osou x, tečnou ke křivce a přímkou spojující počátek souřadné soustavy s bodem dotyku konstantní a roven a^2.

Řešení. Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.1. Obsah trojúhelníka lze spočítat jako $S = \frac{1}{2}\left|\overline{x} \cdot y_0\right|$. Absolutní hodnota je nutná kvůli zohlednění možnosti, že tečna protíná osu x v její záporné části, případně $y_0 < 0$ (jinak bychom nenalezli všechny křivky s požadovanou vlastností).

Dosazením $\bar{x}$ podle vzorce (1.4) do vztahu pro výpočet obsahu zadaného trojúhelníka získáme rovnici, kterou dále upravíme:

$$S = \tfrac{1}{2}\left|\overline{x} \cdot y_0\right| = a^2,$$

$$\tfrac{1}{2}\left|\left(x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)}\right) y_0\right| = a^2,$$

$$\left(x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)}\right) y_0 = \pm 2a^2,$$

$$\tfrac{x_0}{y_0} - \tfrac{1}{y'(x_0)} = \pm \tfrac{2a^2}{y_0^2}.$$

S využitím faktu, že námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0,\, y_0]$, lze říct, že tyto křivky nalezneme řešením diferenciální rovnice:

$$\tfrac{x}{y} - \tfrac{1}{y'} = \pm \tfrac{2a^2}{y^2}.$$

Při řešení této rovnice využijeme možnost záměny proměnných pomocí vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'}$, čímž získáme lineární diferenciální rovnici s neznámou x:

$$\tfrac{x}{y} - x' = \pm \tfrac{2a^2}{y^2},$$

$$x' - \tfrac{x}{y} = \pm \tfrac{2a^2}{y^2}.$$

Tuto rovnici budeme řešit metodou integračního faktoru. Z posledního zápisu rovnice je vidět, že integrační faktor nalezneme jako $\mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-\ln y} = (\mathrm{e}^{\ln y})^{-1} = \frac{1}{y}$. Jelikož jsme zaměnili proměnné, je nutné mít při řešení rovnice na paměti, že neznámou je v tomto případě proměnná x. Po vynásobení obou stran rovnice integračním faktorem pokračujeme v úpravách:

$$\tfrac{x'}{y} - \tfrac{x}{y^2} = \pm \tfrac{2a^2}{y^3},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \pm\frac{2a^2}{y^3},$$

$$\frac{x}{y} = \pm\int\frac{2a^2}{y^3}\,\mathrm{d}y = \pm\frac{a^2}{y^2} + c,\ c\in\mathbb{R},$$

$$xy = cy^2 \pm a^2,\ c\in\mathbb{R},$$

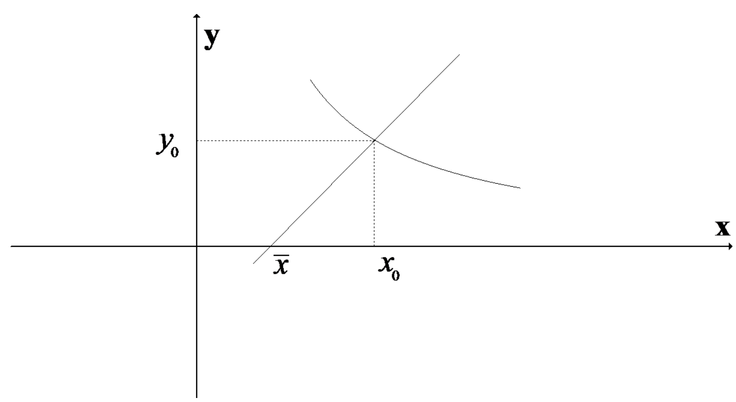
což jsou rovnice námi hledaných křivek. Pro případ $a^2 = 8$ a volbu $c = 0$ dostaneme hyperboly $y = \pm\frac{8}{x}$, což odpovídá křivce $y_2 = \frac{8}{x}$ uvažované v příkladu 2, v rámci kterého jsme ověřovali, zda konkrétní křivky splňují geometrickou vlastnost, kterou jsme uvažovali i nyní. ■

Příklad 17

Určete rovnice křivek v rovině, jejichž normála v libovolném bodě křivky má následující vlastnost: Délka úsečky na ose x mezi počátkem a průsečíkem normály s osou x je rovna kvadrátu y-ové souřadnice bodu, v němž byla normála sestrojena. (Pro jednoduchost požadujte tuto vlastnost pouze po tečnách protínajících osu x v kladné části.)

Řešení. Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku 3.14, ze kterého je vidět, že požadavek obsažený v zadání lze jednoduše vyjádřit jako rovnici $\bar{x} = y_0^2$. Do této rovnice dosadíme podle vzorce (1.6) za $\bar{x}$, čímž získáme rovnici

$$y_0\cdot y'(x_0) + x_0 = y_0^2.$$



Obrázek 3.14

Na základě toho, že námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, můžeme říct, že hledané křivky nalezneme řešením diferenciální rovnice:

$$yy' + x = y^2.$$

Tato rovnice je Bernoulliho rovnice. Použijeme substituci $z = y^2$, ze které vyjádříme $z' = 2yy'$, odkud $y' = z'\cdot\frac{1}{2y}$. Po dosazení substituce do rovnice získáme novou rovnici, která je lineární:

$$\frac{1}{2}z' + x = z,$$

$$z' - 2z = -2x.$$

Tuto rovnici budeme řešit metodou integračního faktoru. Z posledního zápisu rovnice je vidět, že integrační faktor získáme jako $\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x}$. Po vynásobení obou stran rovnice integračním faktorem rovnici dále upravujeme:

$$z'\mathrm{e}^{-2x} - 2z\mathrm{e}^{-2x} = -2x\mathrm{e}^{-2x},$$

$$(z\mathrm{e}^{-2x})' = -2x\mathrm{e}^{-2x},$$

$$z\mathrm{e}^{-2x} = -2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou per partes:

$$-2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -2(-\tfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x) = x\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení hodnoty integrálu na pravou stranu rovnice pokračujeme v úpravách a zpětným dosazením odstraníme substituci $z = y^2$ a upravíme:

$$z\mathrm{e}^{-2x} = x\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y^2\mathrm{e}^{-2x} = x\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$y^2 = x + \tfrac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x},\ c \in \mathbb{R},$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek. ■

Příklad 18

Najděte křivky v rovině, které mají následující vlastnost:
Libovolná tečna křivky vytváří na osách souřadnic úseky, jejichž součet délek je $2a$. (Pro jednoduchost požadujte vlastnost v zadání pouze po tečnách protínajících osy souřadnic v jejich kladných částech.)

Řešení. Označíme-li $\bar{x}$, $\bar{y}$ délku úseků vyťatých tečnou na osách souřadnic, pak požadavek zadání lze jednoduše formulovat jako $\bar{x} + \bar{y} = 2a$. Po dosazení za $\bar{x}$ a $\bar{y}$ podle vzorců (1.4) a (1.5) do tohoto požadavku získáme rovnici

$$x_0 - \tfrac{y_0}{y'(x_0)} + y_0 - x_0 \cdot y'(x_0) = 2a.$$

Díky tomu, že námi hledané křivky jsou tvořeny body $[x_0, y_0]$, můžeme říct, že hledané křivky jsou řešením diferenciální rovnice:

$$x - \tfrac{y}{y'} + y - xy' = 2a.$$

Tuto rovnici dále upravujeme:

$$xy' - y + yy' - x(y')^2 = 2ay',$$

$$xy'(1 - y') - y(1 - y') = 2ay',$$

$$xy' - y = \tfrac{2ay'}{1-y'}$$

$$y = xy' - \frac{2ay'}{1 - y'}.$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že se jedná o Clairautovu rovnici. Použijeme substituci $p = y'$ a obě strany rovnice zderivujeme podle x (při derivování k p přistupujeme jako k funkci proměnné x). Postupně dostáváme:

$$y = xp - \frac{2ap}{1 - p} \quad \Bigg| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \tag{3.8}$$

$$p = p + xp' - 2a\tfrac{p'(1-p)-pp'(-1)}{(1-p)^2},$$

$$0 = xp' - \tfrac{2ap'}{(1-p)^2},$$

$$0 = p'\left[x - \tfrac{2a}{(1-p)^2}\right].$$

Tato rovnice má dvě možná řešení. První možnost je $p' = 0$, odkud plyne $p = c$, což po dosazení do rovnice (3.8) dává řešení rovnice $y = xc - \frac{2ac}{1-c}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (podmínka $c \neq 1$ je nutná kvůli nemožnosti dělit nulou).

Druhé řešení získáme z možnosti $x - \frac{2a}{(1-p)^2} = 0$. Odtud lze vyjádřit $x = \frac{2a}{(1-p)^2}$, což dosadíme do rovnice (3.8):

$$y = \tfrac{2ap}{(1-p)^2} - \tfrac{2ap}{1-p} = \tfrac{2ap^2}{(1-p)^2}.$$

Ze vztahu $x = \frac{2a}{(1-p)^2}$ lze vyjádřit $(1 - p)^2 = \frac{2a}{x}$ a $p = 1 \pm \sqrt{\frac{2a}{x}}$ ($\pm$ se ve vyjádření objevilo kvůli tomu, že při odmocnění jsou dvě možnosti). Využijeme vyjádření, dosadíme a upravíme:

$$y = \frac{2a(1 \pm 2\cdot\sqrt{\frac{2a}{x}} + \frac{2a}{x})}{\frac{2a}{x}} = x \pm 2x\sqrt{\frac{2a}{x}} + 2a,$$

$$y - x - 2a = \pm 2x\sqrt{\frac{2a}{x}},$$

$$(y - x - 2a)^2 = 8ax.$$

Námi hledané křivky tedy mají rovnice $(y - x - 2a)^2 = 8ax$, $y = xc - \frac{2ac}{1-c}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. ■

Poznamejme ještě, že samotná podmínka zadání naznačuje, že úloha povede na řešení Clairautovy rovnice. Podmínce triviálně vyhovuje jistá soustava přímek a tyto přímky zároveň mají být tečnami křivek, které mají splňovat vlastnost požadovanou zadáním. Tato vlastnost je typická právě pro řešení Clairautovy rovnice, u které je každá přímka obecného řešení tečnou ke křivce singulárního řešení.

Příklad 19

Najděte křivky v rovině protínající křivky $y = \ln ax$ pod úhlem $\frac{\pi}{3}$ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty a (v místě průsečíku křivek svírají jejich tečny úhel $\frac{\pi}{3}$ bez ohledu na hodnotu konstanty a). Úhel odečítejte v záporném smyslu.

Pozn.: Zadání je ekvivalentní úloze nalézt izogonální trajektorie systému křivek $y = \ln ax$ protínající tento systém pod úhlem $\frac{\pi}{3}$ (odečítaným v záporném smyslu).

Řešení. Nejprve určíme derivaci křivky $y = \ln ax$: $y' = \frac{1}{x}$. Pomocí tohoto vztahu můžeme vypočítat směrnici tečny křivky $y = \ln ax$ v libovolném jejím bodě. Zároveň lze říct, že diferenciální rovnice $y' = \frac{1}{x}$ určuje systém křivek $y = \ln ax$ (tyto křivky jsou jejím řešením).

V rovnici $y' = \frac{1}{x}$ nahradíme derivaci y' výrazem $\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot y'}$ získaným ze vzorce (2.4), čímž získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou námi hledané křivky. Postupnými úpravami dostáváme:

$$\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot y'} = \frac{1}{x},$$

$$xy' - \sqrt{3} \cdot x = 1 + \sqrt{3} \cdot y',$$

$$y'(x - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot x + 1,$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}\cdot x+1}{x-\sqrt{3}}.$$

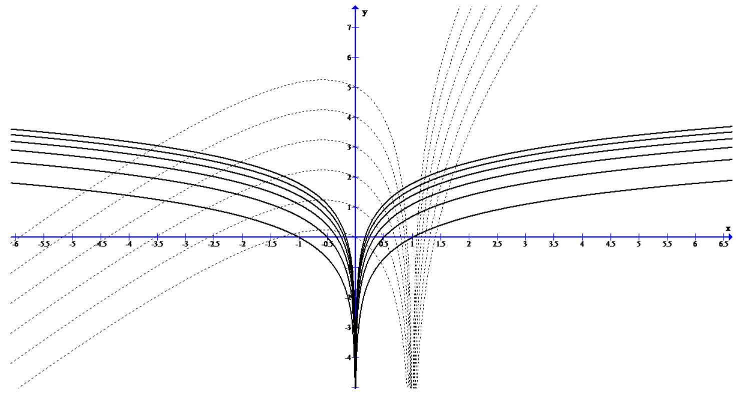
Jelikož tato rovnice je typu $y' = f(x)$, vyřešíme ji jednoduchým integrováním:

$$y = \int \frac{\sqrt{3}\cdot x+1}{x-\sqrt{3}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{3} \int \frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{x-1} \, \mathrm{d}x = \sqrt{3} \int \frac{x-1+\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{x-1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{3} \int (1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{x-1}) \, \mathrm{d}x = \sqrt{3} \cdot x + (1 + \sqrt{3}) \cdot \ln|x - 1| + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Námi hledané křivky jsou tedy $y = \sqrt{3} \cdot x + (1 + \sqrt{3}) \cdot \ln|x - 1| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Grafické znázornění celé situace je na obrázku 3.15. Křivky původního systému křivek ($y = \ln ax$) jsou zobrazeny plnou čarou, jejich izogonální trajektorie jsou zobrazeny tečkovaně. Z obrázku je patrné, že křivky se protínají pod konstantním úhlem ve všech průsečících.



Obrázek 3.15

■

Příklad 20

Najděte křivky v rovině protínající systém přímek $y = ax$ pod úhlem $\frac{\pi}{2}$ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty a.

Pozn.: Zadání je ekvivalentní úloze nalézt ortogonální trajektorie systému křivek $y = ax$.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce (2.6). Z rovnice přímek vyjádříme $a = \frac{y}{x}$, přičemž podle značení použitého u vzorce (2.6) máme $G(x, y) = \frac{y}{x}$. Parciální derivace $G(x, y)$ jsou $\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ a $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{x}$, což dosadíme do vzorce (2.6):

$$\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} y' = 0.$$

Jednoduchou úpravou dále dostáváme:

$$1 + \frac{y}{x} y' = 0,$$

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Řešením této diferenciální rovnice jsou námi hledané křivky. Použitím metody separace proměnných a následnými úpravami dostáváme:

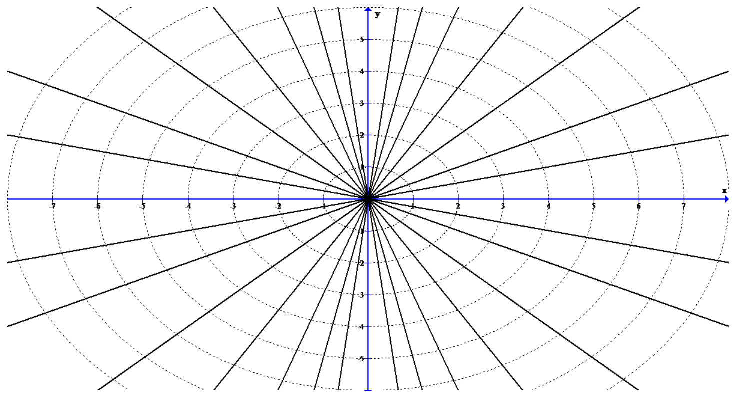
$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tfrac{x}{y},$$

$$-\int x \,\mathrm{d}x = \int y \,\mathrm{d}y,$$

$$-\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2 + \tilde{c},\ \tilde{c} \in \mathbb{R},$$

$$x^2 + y^2 = c,\ c \in \mathbb{R},$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek. Jelikož ale pro $c = 0$ je řešením pouze samotný bod [0, 0], jehož kolmost k přímce nemá smysl uvažovat a pro $c < 0$ je řešením prázdná množina, námi nalezené křivky s požadovanou vlastností budou $x^2 + y^2 = c$, $c > 0$. Z rovnic nalezených křivek a přímek v zadání je patrná velmi názorná geometrická interpretace, která je znázorněna na obrázku 3.16. Soustava přímek ze zadání (plnou čarou) určuje všechny přímky procházející počátkem a křivky které jsou k nim ke všem kolmé jsou kružnice se středem v počátku (tečkovaně). ■



Obrázek 3.16

Příklad 21

Najděte křivky v rovině protínající soustavu hyperbol $y = \frac{a}{x}$ pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ pro libovolnou hodnotu konstanty a. Úhel odečítejte v záporném smyslu.

Pozn.: Zadání je ekvivalentní úloze nalézt izogonální trajektorie systému křivek $y = \frac{a}{x}$ protínající tento systém pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ (odečítaným v záporném smyslu).

Řešení. Vyjdeme ze vztahu (2.5). Z rovnic hyperbol vyjádříme $a = xy$. Označme $G(x, y) = xy$. Parciální derivace jsou $\frac{\partial G}{\partial x} = y$ a $\frac{\partial G}{\partial y} = x$, což po dosazení do vztahu (2.5) vede k rovnici:

$$(x + y)\, y' = x - y.$$

Řešením této diferenciální rovnice jsou námi hledané křivky. Úpravou získáme:

$$y' = \tfrac{x-y}{x+y}.$$

Po rozšíření pravé strany rovnice výrazem $\frac{1}{x}$ je vidět, že tato diferenciální rovnice je homogenní:

$$y' = \tfrac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y = zx$ a $y' = z'x + z$. Po dosazení do diferenciální rovnice získáme novou rovnici, kterou budeme dalšími úpravami převádět na rovnici se separovanými proměnnými:

$$z'x + z = \tfrac{1-z}{1+z},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \tfrac{1-z}{1+z} - z = \tfrac{-z^2-2z+1}{1+z},$$

$$\textstyle\int \tfrac{1+z}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z = \int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pokud integrál na levé straně upravíme jako $\int \tfrac{1+z}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{-2-2z}{-z^2-2z+1}\,\mathrm{d}z$, v integrandu bude čitatel roven derivaci jmenovatele, čehož využijeme pro další integraci a úpravy:

$$-\tfrac{1}{2}\ln|-z^2-2z+1| = \ln|x| + c = \ln|x| + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\ln\tfrac{1}{\sqrt{-z^2-2z+1}} = \ln(\tilde{K}\,|x|),\ \tilde{K} > 0,\ -z^2-2z+1 \neq 0,$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{-z^2-2z+1}} = \tilde{K}x,\ \tilde{K} \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$$K = x^2(-z^2-2z+1),\ K > 0.$$

Dosazením možnosti $z = -1 \pm \sqrt{2}$ (řešení rovnice $-z^2-2z+1 = 0$ dané podmínkou) do zadání rovnice je možné zjistit, že jde také o její řešení, tedy konstanta K může nabývat i hodnoty 0. Po zpětném dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$ získáme řešení rovnice:

$$K = x^2(-\tfrac{y^2}{x^2} - 2\tfrac{y}{x} + 1),\ K \geq 0.$$

Po drobné úpravě získáme

$$x^2 - 2xy - y^2 = K,\ K \geq 0,$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek. ■

Příklad 22

Najděte křivky v rovině protínající soustavu kružnic $x^2 + y^2 = 2ay$ pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty a. Úhel přičítejte v kladném smyslu.

Pozn.: Zadání je ekvivalentní úloze nalézt izogonální trajektorie systému křivek $x^2 + y^2 = 2ay$ protínající tento systém pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ (přičítaným v kladném smyslu).

Řešení. Vyjdeme z rovnice (2.5). Z rovnice systému křivek vyjádříme $a = \frac{x^2+y^2}{2y}$. Podle značení v rovnici (2.5) pak máme $G(x,\,y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$. Parciální derivace jsou $\frac{\partial G}{\partial x} = y$, $\frac{\partial G}{\partial y} = x$. Dosadíme-li je do rovnice (2.5), získáme:

$$\left(\frac{y^2-x^2}{2y^2} - \frac{x}{y}\right)y' = -\frac{y^2-x^2}{2y^2} - \frac{x}{y}.$$

Obě strany rovnice vynásobíme výrazem $-2y^2$ a dále upravíme:

$$\left(-y^2+x^2+2xy\right)y' = y^2-x^2+2xy,$$

$$y' = \tfrac{2xy-x^2+y^2}{2xy+x^2-y^2}.$$

Po rozšíření pravé strany rovnice výrazem $\frac{1}{x^2}$ získáme tvar, ze kterého je vidět, že jde o homogenní diferenciální rovnici:

$$y' = \tfrac{2\frac{y}{x}-1+\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}+1-\frac{y^2}{x^2}}.$$

Použijeme substituci $z=\frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y=zx$ a $y'=z'x+z$. Po dosazení do rovnice získáme novou rovnici, kterou budeme dalšími úpravami převádět na rovnici se separovanými proměnnými:

$$z'x+z = \tfrac{2z-1+z^2}{2z+1-z^2},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \tfrac{2z-1+z^2}{2z+1-z^2} - z = \tfrac{2z-1+z^2-2z^2-z+z^3}{2z+1-z^2},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \tfrac{z^3-z^2+z-1}{2z+1-z^2} = \tfrac{z^2(z-1)+z-1}{2z+1-z^2},$$

$$\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \tfrac{(z-1)(z^2+1)}{2z+1-z^2},$$

$$\int \tfrac{2z+1-z^2}{(z-1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál na levé straně rovnice zjednodušíme pomocí rozkladu na parciální zlomky. Nově vzniklé integrály na levé straně mají v čitateli zlomků derivace jmenovatelů, čehož využijeme pro integraci a následné úpravy:

$$\int\left(\tfrac{1}{z-1} - \tfrac{2z}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z = \int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|z-1| - \ln|z^2+1| = \ln|x| + c = \ln|x| + \ln \mathrm{e}^c,\ c\in\mathbb{R},$$

$$\ln\left|\tfrac{z-1}{z^2+1}\right| = \ln(K\,|x|),\ K>0,$$

$$\left|\tfrac{z-1}{z^2+1}\right| = K\,|x|\,,\ K>0,$$

$$\tfrac{z-1}{z^2+1} = Kx,\ K\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Je-li $K=0$ pak $z=1$, což je ale také řešení rovnice. Konstanta K tedy může nabývat libovolné reálné hodnoty. Po zpětném dosazení substituce $z=\frac{y}{x}$ dále získáváme:

$$\tfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y^2}{x^2}+1} = Kx,\ K\in\mathbb{R},$$

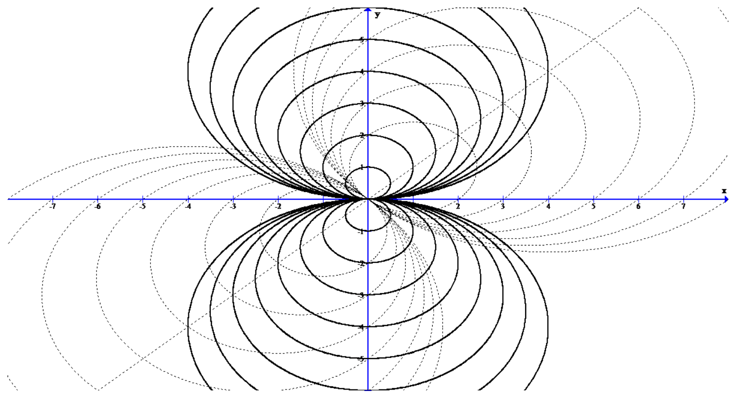
$$\tfrac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = Kx,\ K\in\mathbb{R},$$

$$\tfrac{y-x}{y^2+x^2} = K,\ K\in\mathbb{R},$$

$$y - x = K(x^2 + y^2),\; K \in \mathbb{R},$$

což jsou rovnice námi hledaných křivek.

Pro $K = 0$ jde o přímku $y = x$. Pokud $K \neq 0$, lze rovnici upravit na tvar $x^2 + y^2 - \frac{1}{K}(y - x) = 0$, ze kterého je vidět, že jde o soustavu kružnic. Společnou vlastností těchto kružnic je, že mají střed na přímce $y = x$ (jejich poloměr se mění v závislosti na poloze středu). Bližší znázornění je na obrázku 3.17 (soustava kružnic ze zadání je plnou čarou, izogonální trajektorie jsou tečkovaně).



Obrázek 3.17

■

Příklad 23

Najděte křivky v rovině protínající soustavu parabol $x^2 - 2y = Cx$ pod úhlem $\frac{\pi}{2}$ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty C.

Pozn.: Zadání je ekvivalentní úloze nalézt ortogonální trajektorie systému křivek $x^2 - 2y = Cx$.

Řešení. Vyjdeme ze vztahu (2.6). Z rovnice parabol vyjádříme $C = \frac{x^2-2y}{x}$, z čehož máme podle značení použitého ve vztahu (2.6) $G(x, y) = \frac{x^2-2y}{x}$. Parciální derivace jsou $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{x^2+2y}{x^2}$, $\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{2}{x}$. Dosazením do vztahu (2.6) získáme:

$$-\frac{2}{x} - \frac{x^2 + 2y}{x^2} y' = 0.$$

Řešením této rovnice jsou námi hledané křivky. Rovnici postupně upravujeme:

$$-2x - \left(x^2 + 2y\right) y' = 0,$$

$$-2x = \left(x^2 + 2y\right) y',$$

$$-2\frac{x}{y'} = x^2 + 2y,$$

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{y'} = -\tfrac{y}{x}.$$

V této rovnici provedeme záměnu proměnných s využitím vztahu $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'}$. Vzhledem k tomu, že úlohu řešíme z geometrického pohledu, není podstatné, zda nezávisle proměnná je x nebo y. Řešení budeme hledat jako funkci x proměnné y:

$$\tfrac{1}{2}x + x' = -\tfrac{y}{x}.$$

Tato rovnice je Bernoulliho rovnice. Použijeme substituci $z = x^2$, ze které vyjádříme $x = \sqrt{z}$ a $z' = 2xx'$, čímž po dosazení získáme lineární diferenciální rovnici:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{z} + \tfrac{z'}{2\sqrt{z}} = -\tfrac{y}{\sqrt{z}},$$

$$z' + z = -2y.$$

Integrační faktor (kterým vynásobíme rovnici) je $\mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^y$, čehož využijeme pro další úpravy:

$$z'\mathrm{e}^y + z\mathrm{e}^y = -2y\mathrm{e}^y,$$

$$(z\mathrm{e}^y)' = -2y\mathrm{e}^y,$$

$$z\mathrm{e}^y = -2\int y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y.$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme použitím metody per partes:

$$z\mathrm{e}^y = -2\int y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = -2(y\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y) = -2y\mathrm{e}^y + 2\mathrm{e}^y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Po zpětném dosazení substituce $z = x^2$ získáme řešení rovnice:

$$x^2\mathrm{e}^y = -2y\mathrm{e}^y + 2\mathrm{e}^y + c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$x^2 = -2y + 2 + c\mathrm{e}^{-y},\ c \in \mathbb{R},$$

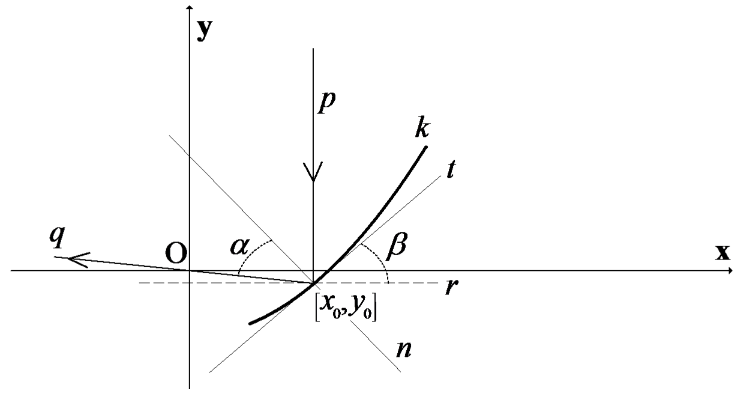
což jsou rovnice námi hledaných křivek. ■

Příklad 24

Určete tvar zrcadla, které odráží rovnoběžné světelné paprsky do jediného bodu (ohniska).

Řešení. Zvolme souřadnou soustavu tak, že ohnisko do kterého mají směřovat světelné paprsky, bude mít souřadnice [0, 0]. Dále předpokládejme, že rovnoběžné paprsky směřující do zrcadla přicházejí rovnoběžně s osou y a směřují proti její orientaci. Tyto předpoklady nemají vliv na tvar zrcadla, protože umístění zrcadla ani směr příchozích paprsků nemají vliv na jeho optické vlastnosti. Tvar zrcadla budeme hledat jako funkci proměnné x ve tvaru $y = f(x)$.

Situace nastíněná zadáním je znázorněna na obrázku 3.18. Nejprve využijeme toho, že úhel dopadu paprsku na zrcadlo se rovná úhlu odrazu. Úhel α (znázorněný na obrázku mezi normálou n a odraženým paprskem q) tedy svírají i přímky p (přicházející paprsek) a n (normála zrcadla k), neboli $\alpha = \angle(p, n)$. Jelikož přímka r je k přímce p kolmá, musí platit $2\alpha + \angle(r, q) = \frac{\pi}{2}$, odkud dostaneme $\angle(r, q) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Jelikož t a n jsou kolmé a $\angle(p, n) = \alpha$, jednoduše dovodíme $\angle(p, t) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Jelikož p a r jsou také kolmé, získáváme dále $\beta = \frac{\pi}{2} - \angle(p, t) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha$, tedy $\alpha = \beta$.



Obrázek 3.18

Jelikož derivace má význam směrnice tečny, lze psát $y'(x_0) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Dále budeme potřebovat nalézt souvislost mezi $y'(x_0)$ a souřadnicemi bodu $[x_0, y_0]$, do kterého dopadá paprsek. Jelikož námi hledaná křivka je tvořena body $[x_0, y_0]$, bude řešením rovnice dané touto souvislostí (po zobecnění odstraněním indexů u souřadnic) námi hledaná křivka $y = f(x)$. Při hledání této souvislosti využijeme skutečnost, že úhel mezi přímkami r a q lze vyjádřit pomocí souřadnic x_0, y_0 i pomocí úhlu α. Jednak platí vztah $\operatorname{tg}(\angle(r, q)) = \frac{|y_0|}{x_0} = -\frac{y_0}{x_0}$, ale také platí $\operatorname{tg}(\angle(r, q)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$. S využitím vztahu $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) = \operatorname{cotg}(2v) = \frac{1-\operatorname{tg}^2 v}{2\cdot\operatorname{tg} v}$ známého z goniometrie můžeme postupně oba vztahy zkombinovat:

$$\operatorname{tg}(\angle(r, q)) = -\frac{y_0}{x_0} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\left(y'(x_0)\right)^2}{2\cdot y'(x_0)},$$

$$-\frac{y_0}{x_0} = \frac{1-\left(y'(x_0)\right)^2}{2\cdot y'(x_0)}.$$

Odstraněním „přebytečných“ indexů získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením je křivka $y = f(x)$, která popisuje tvar zrcadla:

$$-\frac{y}{x} = \frac{1-(y')^2}{2y'}.$$

Jelikož naším cílem je najít řešení ve tvaru $y = f(x)$, pokusíme se (místo řešení metodou substituce $p = y'$) úpravami vyjádřit y' explicitně:

$$2yy' = x\left((y')^2 - 1\right),$$

$$x\,(y')^2 - 2yy' - x = 0,$$

$$(y')^2 - 2\frac{y}{x}y' - 1 = 0.$$

Na tuto rovnici se budeme dívat jako na kvadratickou rovnici s neznámou y'. Rovnici vyřešíme:

$$y' = \frac{2\frac{y}{x} \pm \sqrt{4\frac{y^2}{x^2} + 4}}{2} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Jelikož $y < 0$ a $x > 0$ (viz obrázek 3.18), je směrnice tečny kladná a tedy musí být $y' > 0$. Z toho plyne, že v rovnici musí být před odmocninou znaménko $+$. Řešíme tedy rovnici

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Je vidět, že tato rovnice je homogenní. Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, ze které vyjádříme $y = zx$ a $y' = z'x + z$. Po dosazení do rovnice získáme novou rovnici, kterou dále upravujeme na rovnici se separovanými proměnnými:

$$z'x + z = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \sqrt{z^2 + 1},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{z}^2 + 1}}.$$

Integrál na levé straně rovnice je triviální. Integrál na pravé straně rovnice bývá běžně uváděn v tabulkách elementárních integrálů, proto zde nebudeme tuto integraci rozepisovat podrobně, pro jeho výpočet je možno použít substituci $\sqrt{1 + z^2} = t - z$. Po integraci pokračujeme v úpravách:

$$\ln|x| = \ln\left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right| + c = \ln\left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right| + \ln \mathrm{e}^c,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\ln|x| = \ln\left(K \cdot \left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right|\right),\ K > 0,$$

$$|x| = K \cdot \left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right|,\ K > 0,$$

$$x = K \cdot \left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po zpětném dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$ dále upravujeme:

$$x = K \cdot \left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}\right),\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{x}{K} - \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

$$\frac{x^2}{K^2} - 2 \cdot \frac{x}{K} \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + 1,\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

$$\frac{x^2}{K^2} = 2\frac{y}{K} + 1,\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

$$x^2 = 2Ky + K^2 = K(2y + K),\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Z vyjádření $x^2 = 2K(y + \frac{K}{2})$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vidět, že námi nalezené křivky jsou soustavou parabol. Vrchol těchto parabol leží vždy na ose y, zároveň lze ale nalézt nějakou takovou parabolu pro každý bod osy y (kromě počátku $[0, 0]$). Parametr parabol je K, odkud vzdálenost vrcholu od ohniska je $\frac{K}{2}$, což je ale pro každou námi nalezenou parabolu současně y-ová souřadnice vrcholu. Z těchto skutečností plyne, že ohnisko je pro všechny námi nalezené křivky společné $[0, 0]$ (což je podle námi zvoleného způsobu formulace zadání zároveň bod, do kterého se odrazí všechny paprsky přicházející do vyduté části zrcadla rovnoběžně s osou y). Jelikož při zadání vrcholu a ohniska je určena parabola jednoznačně (a je právě jedna) a zároveň můžeme zvolit každý bod na ose y (s výjimkou pevně zvoleného ohniska), můžeme zjištěné závěry zobecnit. Každá parabola odráží světelné paprsky, směřující do její duté části ve směru kolmém na její řídící přímku (neboli rovnoběžně s její osou), do svého ohniska. Hledaným tvarem zrcadla ze zadání je tedy obecně parabola.

Doplňme ještě, že tato úloha se nazývá „Archimédova“. Traduje se, že při obléhání Syrakus v letech 214-212 př. Kr. měl Archimédés z vyleštěných štítů obránců sestavovat zrcadla, kterými soustředil sluneční paprsky a zapaloval tak prosmolené lodě obléhatelů. ■

3.2 Neřešené příklady

1. Určete rovnici křivky, která prochází bodem $[0,\, 0]$ a jejíž tečna vedená libovolným bodem $[x_0,\, y_0]$ křivky má směrnici $\arcsin x_0$.

2. Ověřte, zda křivka $y = \frac{4}{4-x}$ má následující vlastnost:

   Obsah trojúhelníka určeného libovolnou tečnou ke křivce, osou x a kolmicí k ose x vedenou bodem dotyku tečny a křivky je neměnný, rovná se jisté konstantě P.

   Pokud je tato vlastnost splněna, určete hodnotu konstanty P.

3. Ověřte, zda parabola $y = 2x^2 - 3x$ má následující vlastnost:

   Plocha lichoběžníka tvořeného tečnou paraboly v libovolném jejím bodě $\left[0 < x_0 < \frac{3}{2},\, y_0\right]$, osou x, osou y a přímkou $x = x_0$ je rovna $k \cdot x_0^2$, kde k je jistá konstanta.

   Pokud je tato vlastnost splněna, určete hodnotu konstanty k.

4. Najděte křivky v rovině, jejichž tečna protíná osu y v bodě, jehož y-ová souřadnice je o konstantu d větší, než y-ová souřadnice bodu dotyku tečny. Která taková křivka prochází bodem $[1,\, 2]$?

5. Najděte křivky v rovině, které mají následující vlastnost:

   Pro libovolnou tečnu platí, že bod křivky, kterým je tečna vedena, je od průsečíku osy y a této tečny pětkrát dál než od osy y (kolmá vzdálenost).

   Které z těchto křivek procházejí bodem $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\, -2\right]$?

6. Určete rovnice křivek v rovině, jejichž libovolná normála má následující vlastnost: Délka úsečky na ose x mezi počátkem a průsečíkem normály s osou x je rovna kvadrátu x-ové souřadnice bodu, kterým je normála vedena. (Pro jednoduchost požadujte tuto vlastnost pouze po tečnách protínajících osu x v kladné části.)

7. Najděte křivky v rovině, pro které je průsečík libovolné tečny s osou y stejně vzdálen od bodu dotyku i od počátku souřadné soustavy.

8. Určete rovnice všech křivek (v rovině), jejichž libovolná tečna protínající přímku $y = 2x$ ji protíná v bodě, jehož x-ová souřadnice je rovna dvojnásobku x-ové souřadnice bodu dotyku tečny. Která taková křivka prochází bodem $[0,\, 1]$?

9. Najděte křivky v rovině, pro které je obsah lichoběžníka, určeného osami souřadnic, tečnou ke křivce a kolmicí na osu x, vedenou bodem dotyku, konstantní a roven $3a^2$.

10. Určete rovnice křivek v rovině, jejichž libovolná normála má následující vlastnost: Délka úsečky na ose x mezi počátkem a průsečíkem normály s osou x je rovna aritmetickému průměru čtverců souřadnic bodu křivky, kterým je normála vedena. (Pro jednoduchost požadujte tuto vlastnost pouze po tečnách protínajících osu x v kladné části.)

11. Najděte křivky v rovině, které mají následující vlastnost: Úsečka vyťatá souřadnými osami na libovolné tečně k této křivce má konstantní délku a. (Pro jednoduchost požadujte vlastnost v zadání pouze po tečnách protínajících osy souřadnic v jejich kladných částech.)

12. Najděte křivky v rovině protínající křivku $y = \ln kx$ pod úhlem φ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty k.

    a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$, úhel odečítejte v záporném smyslu,

    b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

13. Najděte křivky v rovině protínající parabolu $y = ax^2$ pod úhlem $\frac{\pi}{2}$ pro libovolnou hodnotu konstanty a.

14. Najděte křivky v rovině protínající paraboly $y^2 = -2x+a$ pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ pro libovolnou hodnotu konstanty a. Úhel přičítejte v kladném smyslu.

15. Najděte křivky v rovině protínající křivky $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ pro libovolnou nenulovou hodnotu konstanty a. Úhel odečítejte v záporném smyslu.

16. Najděte křivky v rovině protínající paraboly $y^2+ay = x$ pod úhlem $\frac{\pi}{2}$ pro libovolnou hodnotu konstanty a.

3.3 Výsledky neřešených příkladů

1. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$
2. vlastnost je splněna, $P = 2$
3. vlastnost je splněna, $k = \frac{3}{2}$
4. $y = -d \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, bodem $[1,\ 2]$ prochází $y = -d \ln|x| + 2$
5. $y = \pm \frac{x}{\sqrt{24}} + c$, $c \in \mathbb{R}$, bodem $\left[\frac{1}{\sqrt{6}},\ -2\right]$ procházejí křivky $y = \frac{x}{\sqrt{24}} - \frac{5}{2}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{24}} - \frac{3}{2}$
6. $3y^2 = 2x^3 - 3x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$
7. $x^2 + y^2 = Kx^3$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
8. $y = \frac{x^2+c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$, bodem $[0,\ 1]$ žádná z těchto křivek neprochází
9. $y = \frac{2a^2+cx^3}{x}$, $c \in \mathbb{R}$
10. $y^2 = c\mathrm{e}^x - x^2$, $c \in \mathbb{R}$
11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
12. a) $y = x + 2\ln|x-1| + c$, $c \in \mathbb{R}$, b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$
13. $x^2 + 2y^2 = c$, $c > 0$
14. $x + y - 2\ln|y+1| = c$, $c \in \mathbb{R}$
15. $\frac{y-x}{y^2+x^2} = c$, $c \in \mathbb{R}$
16. $xy = \frac{1}{3}y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$

Literatura

[1] *Miloš Ráb:* Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Masarykova univerzita, Brno, 2004. 96 s. ISBN 80-210-3416-5

[2] *Roman Plch:* Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice. Masarykova univerzita, Brno, 2007. 31 s. ISBN 80-210-2806-8

[3] *Boris Pavlovič Demidovič:* Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Havlíčkuv Brod, 2003. 460 s. ISBN 80-7200-587-1

[4] *Zuzana Došlá, Jaromír Kuben:* Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Masarykova univerzita, Brno, 2008. 215 s. ISBN 80-210-3121-2

[5] *Vítězslav Novák:* Integrální počet v R. Masarykova univerzita, Brno, 2001. 85 s. ISBN 80-210-2720-7

[6] Zápisy přednášek předmětu „M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití I“ vyučovaného na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Vytvořil *doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.*, text je dostupný na adrese *https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/M5858/um/DifRovUzI.pdf* nebo ve studijních materiálech předmětu v IS MUNI (podzim 2007).